IUC ACADEMY

INCLUSIVE UNIVERSAL CAREERS ACADEMY

Learn. Prepare. Progress. • www.iucacademy.com

IUC अकादमी नोट्स

संपूर्ण
पाठ्यक्रम • विस्तृत व्याख्या • तुलनात्मक सारणियाँ • अभ्यास प्रश्न

संपूर्ण उच्चतर गणित (Higher Mathematics — NDA, CUET, ICG, TGT/PGT) अध्ययन नोट्स

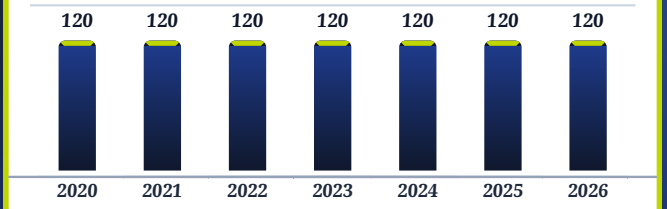
COMPLETE HIGHER MATHEMATICS: CALCULUS, VECTORS, 3D, MATRICES & PROBABILITY

UPSC NDA & NA (Paper-1: 300 Marks), Indian Air Force Group-X (Agniveer Vayu), Navy SSR, Indian Coast Guard, CUET (UG), DSSSB/KVS TGT-PGT Maths एवं राज्य तकनीकी परीक्षाओं के लिए समुच्चय, सम्मिश्र संख्याएँ, आव्यूह-सारणिक, शांकव परिच्छेद, कलन (Calculus), सदिश, 3D ज्यामिति एवं प्रायिकता (100% महत्वपूर्ण सूत्र)

विषयवार परीक्षा प्रश्न भार विभाजन (%)



विगत वर्षों में पूछे गए प्रश्नों का रुझान



लक्षित प्रतियोगी, प्रवेश एवं विभागीय परीक्षाएँ (Target Exams Coverage)

UPSC NDA & NA (120 Questions / 300 Marks) • Air Force Group-X • Navy SSR • Coast Guard • CUET UG Maths • TGT/PGT Mathematics

इस पुस्तक के प्रमुख खंड एवं परीक्षा प्रश्न भार (%)

- अवकल एवं समाकल कलन (Limits, Derivatives, Maxima-Minima, Integration, Diff. Equations) (28%)
- बीजगणित (समुच्चय, संबंध-फलन, सम्मिश्र संख्याएँ, द्विघात समीकरण, श्रेणी, क्रमचय-संचय) (24%)
- आव्यूह एवं सारणिक (Matrices, Determinants, Inverse, Cramer Rule & System of Equations) (16%)
- द्विविमीय शांकव परिच्छेद (सरल रेखा, वृत्त, परवलय, दीर्घवृत्त, अतिपरवलय) व त्रिकोणमिति (18%)
- सदिश बीजगणित (Dot/Cross Product), त्रिविमीय ज्यामिति (3D) एवं प्रायिकता (Bayes/Binomial) (14%)

संपूर्ण पाठ्यक्रम
NCERT एवं मानक स्रोत

तुलनात्मक सारणियाँ
प्रवाह आरेख व चार्ट

स्मृति सूत्र
त्वरित रिवीजन बिंदु

अभ्यास प्रश्न
व्याख्या सहित हल

आमुख, परीक्षा भार विश्लेषण एवं अध्ययन रणनीति — संपूर्ण उच्चतर गणित (Higher Mathematics — NDA, CUET, ICG, TGT/PGT) अध्ययन नोट्स

IUC Academy (Inclusive Universal Careers Academy | www.iucacademy.com) • आधिकारिक अध्ययन नोट्स

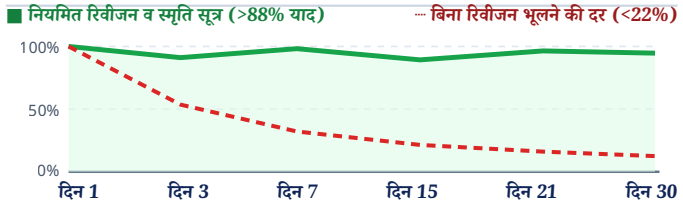
प्रिय अभ्यर्थियों,

अखिल भारतीय प्रतियोगी परीक्षाओं, प्रवेश परीक्षाओं एवं विभागीय पदोन्नति परीक्षाओं के नवीनतम पैटर्न में अवधारणात्मक स्पष्टता और सटीक तथ्यों का समन्वय अत्यंत आवश्यक है। इसी उद्देश्य से **IUC Academy (www.iucacademy.com)** द्वारा इन विस्तृत अध्ययन नोट्स का संकलन किया गया है। इसमें प्रत्येक अध्याय के साथ **तुलनात्मक सारणियाँ, प्रवाह आरेख, महत्वपूर्ण सूत्र, 'क्या आप जानते हैं?' बॉक्स, 'परीक्षा सतर्कता (सामान्य गलतियाँ)', स्मृति सूत्र (Memory Tricks)** और **व्याख्या सहित हल प्रश्न** दिए गए हैं ताकि आपको पढ़ने और याद रखने में पूर्ण सुगमता रहे।

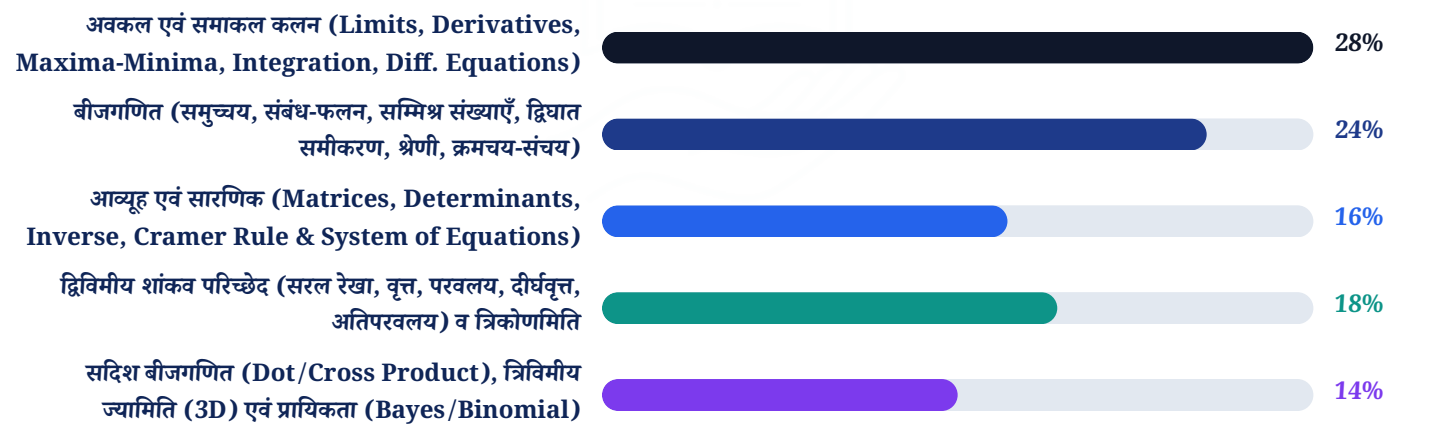
कठिनाई स्तर के अनुसार लक्ष्य सटीकता एवं कट-ऑफ (%)



नियमित रिवीजन (1-3-7-21 दिन नियम) एवं स्मृति धारण ग्राफ



अध्यायवार एवं खंडवार प्रश्न भार सूचकांक (Topic-wise Weightage %)



प्रामाणिक पाठ्यक्रम एवं आधिकारिक संदर्भ स्रोत (Verified Official Sources)

- UPSC NDA Official Syllabus (https://upsc.gov.in/)
- CUET Domain Mathematics Study Kit (https://nta.ac.in/)
- NCERT Class 11 & 12 Mathematics (https://ncert.nic.in/textbook.php)

विस्तृत विषय-सूची एवं अध्याय संरचना (Table of Contents)

संपूर्ण उच्चतर गणित (Higher Mathematics — NDA, CUET, ICG, TGT/PGT) अध्ययन नोट्स • संपूर्ण अध्याय, तुलनात्मक सारणियाँ, अभ्यास प्रश्न एवं त्वरित रिवीजन

1. पुस्तक क्रमांक 31: संपूर्ण उच्चतर गणित अध्ययन नोट्स (Complete Higher Mathematics Study Notes)

- (कलन, सदिश, त्रि-विमीय ज्यामिति, आव्यूह, बीजगणित, त्रिकोणमिति, निर्देशांक ज्यामिति, प्रायिकता एवं सांख्यिकी)

2. प्रस्तावना एवं परीक्षा-वार पाठ्यक्रम भार (Exam Weightage Matrix)

3. अध्याय 1: समुच्चय सिद्धांत, संबंध एवं फलन (Sets, Relations & Functions)

4. 1.1 समुच्चय सिद्धांत की मूल अवधारणाएँ एवं प्रकार (Fundamentals of Set Theory)

- समुच्चय गणना के 1D मानक सूत्र (Standard 1D Formulas for Sets)

5. 1.2 कार्तीय गुणन एवं संबंध (Cartesian Product & Relations)

- समुच्चय A (n(A) = n) पर परिभाषित संबंधों के प्रकार एवं गणना सूत्र

6. 1.3 फलन: डोमेन, रेंज एवं एकैकी-आच्छादक वर्गीकरण (Functions: Domain, Range & Classification)

- डोमेन (प्रांत) ज्ञात करने के 5 स्वर्णिम नियम
- फलनों के प्रकार एवं गणना के महत्वपूर्ण सूत्र (यदि n(A) = m तथा n(B) = n)

7. 1.4 तुलनात्मक सारणी: मानक फलनों के प्रांत, परिसर एवं गुणधर्म

8. 1.5 IUC सुपर-फास्ट शॉर्ट-ट्रिक्स (Chapter 1 Short-Tricks)

9. 1.6 हल सहित उदाहरण (Solved Examples)

10. 1.7 विगत वर्षों के प्रश्न (PYQs — हल सहित)

11. अध्याय 2: सम्मिश्र संख्याएँ, द्विघात समीकरण एवं द्विआधारी संख्याएँ (Complex Numbers, Quadratic Equations & Binary Numbers)

12. 2.1 आयोटा (i) की घातें एवं सम्मिश्र संख्या का बीजगणित

13. 2.2 मापांक, कोणांक एवं ध्रुवीय/ऑयलर रूप (Modulus, Argument & Polar Form)

- मापांक एवं कोणांक के 1D मानक सूत्र
- चतुर्थांश के अनुसार मुख्य कोणांक θ ∈ (-π, π] (जहाँ α = tan^-1(|y / x|))

14. 2.3 इकाई के घनमूल (Cube Roots of Unity — 1, ω, ω^2)

15. 2.4 द्विघात समीकरण (ax^2 + bx + c = 0, जहाँ a ≠ 0)

16. 2.5 द्विआधारी संख्या प्रणाली (Binary Number System — विशेष रूप से UPSC NDA के लिए)

17. 2.6 IUC सुपर-फास्ट शॉर्ट-ट्रिक्स (Chapter 2 Short-Tricks)

18. 2.7 हल सहित उदाहरण (Solved Examples)

19. 2.8 विगत वर्षों के प्रश्न (PYQs — हल सहित)

20. अध्याय 3: अनुक्रम एवं श्रेणी (AP, GP, HP), क्रमचय-संचय, द्विपद प्रमेय एवं लघुगणक

21. 3.1 समांतर, गुणोत्तर एवं हरात्मक श्रेणी (AP, GP & HP)

- AP, GP तथा HP की समेकित तुलनात्मक सारणी (1D Formulas)
- माध्यों के संबंध एवं विशेष श्रेणियों के योग के महत्वपूर्ण सूत्र

22. 3.2 क्रमचय एवं संचय (Permutations & Combinations)

23. 3.3 द्विपद प्रमेय (Binomial Theorem) एवं लघुगणक (Logarithms)

- लघुगणक (Logarithms) के 1D स्वर्णिम सूत्र (x > 0, y > 0, a > 0, a ≠ 1)

24. 3.4 IUC सुपर-फास्ट शॉर्ट-ट्रिक्स (Chapter 3 Short-Tricks)

25. 3.5 हल सहित उदाहरण (Solved Examples)

26. 3.6 विगत वर्षों के प्रश्न (PYQs — हल सहित)

27. अध्याय 4: आव्यूह एवं सारणिक (Matrices & Determinants)

28. 4.1 आव्यूह के प्रकार एवं बीजगणित (Types & Algebra of Matrices)

- विशेष वर्ग आव्यूहों की तुलनात्मक सारणी (Special Square Matrices)

29. 4.2 सारणिक, सहखंडज एवं व्युत्क्रम आव्यूह (Determinants, Adjoint & Inverse)

- सारणिक एवं सहखंडज के 10 अति-महत्वपूर्ण महत्वपूर्ण सूत्र (यदि A कोटि n का वर्ग आव्यूह है)

30. 4.3 रैखिक समीकरण निकाय (क्रेमर नियम) एवं अभिलाक्षणिक मूल (Eigenvalues)

- अभिलाक्षणिक मूल (Eigenvalues λ) एवं कैले-हैमिल्टन प्रमेय

31. 4.4 IUC सुपर-फास्ट शॉर्ट-ट्रिक्स (Chapter 4 Short-Tricks)

32. 4.5 हल सहित उदाहरण (Solved Examples)

33. 4.6 विगत वर्षों के प्रश्न (PYQs — हल सहित)

34. अध्याय 5: त्रिकोणमितीय फलन, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन एवं त्रिभुज के गुण

35. 5.1 त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ, संयुक्त कोण एवं रूपांतरण सूत्र

- संयुक्त कोण, रूपांतरण एवं अपवर्त्य कोणों के 1D मानक सूत्र

36. 5.2 अधिकतम व न्यूनतम मान एवं त्रिकोणमितीय समीकरण

37. 5.3 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन (Inverse Trigonometric Functions - ITF)

- ITF की मुख्य मान शाखा (Principal Value Branch) एवं प्रांत की तुलनात्मक सारणी
- ITF के प्रमुख 1D योग एवं रूपांतरण सूत्र

38. 5.4 त्रिभुज के गुण (Properties of Triangles — ΔABC में भुजाएँ a, b, c एवं अर्ध-परिमाप s = (a+b+c)/2)

39. 5.5 IUC सुपर-फास्ट शॉर्ट-ट्रिक्स (Chapter 5 Short-Tricks)

40. 5.6 हल सहित उदाहरण (Solved Examples)

41. 5.7 विगत वर्षों के प्रश्न (PYQs — हल सहित)

42. अध्याय 6: द्वि-विमीय निर्देशांक ज्यामिति एवं शांकव परिच्छेद (2D Coordinate Geometry & Conic Sections)

43. 6.1 बिंदु, दूरी, विभाजन एवं त्रिभुज के केंद्र (Points, Distance, Section & Centres of Triangle)

- त्रिभुज के चार प्रमुख केंद्रों की तुलनात्मक सारणी (शीर्ष A(x1,y1), B(x2,y2), C(x3,y3) एवं भुजाएँ a, b, c)

44. 6.2 सरल रेखा (Straight Line) के मानक समीकरण एवं गुणधर्म

45. 6.3 वृत्त (Circle) के समीकरण एवं स्पर्श रेखा

46. 6.4 शांकव परिच्छेद (Conic Sections — परवलय, दीर्घवृत्त एवं अतिपरवलय)

- परवलय, दीर्घवृत्त एवं अतिपरवलय की मास्टर तुलनात्मक सारणी (1D Formulas)

47. 6.5 IUC सुपर-फास्ट शॉर्ट-ट्रिक्स (Chapter 6 Short-Tricks)

पुस्तक क्रमांक 31: संपूर्ण उच्चतर गणित अध्ययन नोट्स (Complete Higher Mathematics Study Notes)

(कलन, सदिश, त्रि-विमीय ज्यामिति, आव्यूह, बीजगणित, त्रिकोणमिति, निर्देशांक ज्यामिति, प्रायिकता एवं सांख्यिकी)

लक्षित परीक्षाएँ: UPSC NDA एवं NA (Paper-I Mathematics), CUET (UG एवं PG Domain Mathematics), भारतीय वायुसेना अग्निवीरवायु (Science / X-Group), भारतीय नौसेना (SSR / AA), राज्य स्तरीय TGT एवं PGT गणित (UP TGT/PGT, DSSSB, KVS, NVS, BPSC TRE), तथा JEE Main व राज्य इंजीनियरिंग प्रवेश परीक्षाएँ।

आधिकारिक शैक्षिक पोर्टल: www.iucacademy.com

संस्करण विशेषताएँ: 100% शुद्ध देवनागरी हिंदी माध्यम | 1D स्वच्छ इनलाइन सूत्र प्रारूप | IUC सुपर-फास्ट शॉर्ट-ट्रिक्स | तुलनात्मक सारणियाँ | हल सहित उदाहरण एवं विगत वर्षों के प्रश्न (PYQs)।

प्रस्तावना एवं परीक्षा-वार पाठ्यक्रम भार (Exam Weightage Matrix)

उच्चतर गणित (Higher Mathematics) रक्षा सेवाओं (UPSC NDA/NA, Airforce X-Group, Navy SSR), केंद्रीय विश्वविद्यालय प्रवेश परीक्षाओं (CUET UG/PG), शिक्षक भर्ती परीक्षाओं (TGT/PGT) तथा अभियांत्रिकी प्रवेश परीक्षाओं की रीढ़ है। इस अध्ययन नोट्स में प्रत्येक अध्याय को शून्य से शिखर (Basic to Advanced) के सिद्धांत पर इस प्रकार संरचित किया गया है कि विद्यार्थी संकल्पनात्मक गहराई (Conceptual Clarity) के साथ-साथ 15 से 30 सेकंड में प्रश्न हल करने की शॉर्ट-ट्रिक्स भी सीख सकें। सभी गणितीय सूत्रों को **1D Clean Inline Format** में प्रस्तुत किया गया है ताकि किसी भी डिजिटल स्क्रीन या प्रिंट माध्यम पर पढ़ने में पूर्ण स्पष्टता रहे।

अध्याय संख्या एवं नाम	UPSC NDA (120 प्रश्न)	CUET UG/PG (40-50 प्रश्न)	Airforce X / Navy (25 प्रश्न)	TGT / PGT गणित (125 प्रश्न)	मुख्य स्कोरिंग विषय (High-Yield Topics)
1. समुच्चय, संबंध एवं फलन	8 – 10 प्रश्न	3 – 4 प्रश्न	2 प्रश्न	8 – 10 प्रश्न	वेन आरेख, तुल्यता संबंध, डोमेन-रेंज, एकैकी-आच्छादक फलन
2. सम्मिश्र संख्याएँ, द्विघात व द्विआधारी	10 – 12 प्रश्न	2 – 3 प्रश्न	2 – 3 प्रश्न	10 – 12 प्रश्न	इकाई के घनमूल (ω), मापांक-कोणांक, मूलों की प्रकृति, बाइनरी रूपांतरण
3. श्रेणी, क्रमचय-संचय, द्विपद व लघुगणक	12 – 15 प्रश्न	3 – 4 प्रश्न	3 प्रश्न	12 – 14 प्रश्न	AP-GP-HP संबंध, शब्दकोश रैंक, स्वतंत्र पद, लघुगणकीय असमिकाएँ
4. आव्यूह एवं सारणिक	10 – 12 प्रश्न	6 – 8 प्रश्न	2 – 3 प्रश्न	12 – 15 प्रश्न	व्युत्क्रम आव्यूह (A^-1), सहखंडज के गुणधर्म, क्रेमर नियम, अभिलाक्षणिक मूल
5. त्रिकोणमिति, ITF एवं त्रिभुज के गुण	15 – 18 प्रश्न	3 – 4 प्रश्न	3 – 4 प्रश्न	12 – 15 प्रश्न	C-D सूत्र, अधिकतम-न्यूनतम मान, मुख्य मान शाखा, Sine/Cosine नियम
6. द्वि-विमीय ज्यामिति एवं शांकव परिच्छेद	12 – 15 प्रश्न	2 – 3 प्रश्न	3 प्रश्न	12 – 15 प्रश्न	सरल रेखा, वृत्त की स्पर्श रेखा, परवलय, दीर्घवृत्त व अतिपरवलय की उत्केंद्रता
7. सीमा, सांतत्य, अवकलन व अनुप्रयोग	12 – 14 प्रश्न	8 – 10 प्रश्न	3 – 4 प्रश्न	14 – 16 प्रश्न	L'Hospital नियम, सांतत्य परीक्षण, अस्पष्ट अवकलन, उच्चिष्ठ-निम्निष्ठ
8. अनिश्चित/निश्चित समाकलन व क्षेत्रफल	10 – 12 प्रश्न	8 – 10 प्रश्न	3 प्रश्न	12 – 15 प्रश्न	आंशिक भिन्न, King's Property, Wallis सूत्र, वक्रों से घिरा क्षेत्रफल
9. अवकल समीकरण	5 – 6 प्रश्न	3 – 4 प्रश्न	1 – 2 प्रश्न	6 – 8 प्रश्न	कोटि व घात, चर पृथक्करण, समघातीय समीकरण, रैखिक समीकरण व समाकलन गुणक

अध्याय संख्या एवं नाम	UPSC NDA (120 प्रश्न)	CUET UG/PG (40-50 प्रश्न)	Airforce X / Navy (25 प्रश्न)	TGT / PGT गणित (125 प्रश्न)	मुख्य स्कोरिंग विषय (High-Yield Topics)
10. सदिश, 3D ज्यामिति, प्रायिकता व सांख्यिकी	18 – 22 प्रश्न	8 – 10 प्रश्न	3 – 4 प्रश्न	18 – 20 प्रश्न	अदिश व सदिश गुणन, समतल व रेखा, बेज प्रमेय, द्विपद बंटन, मानक विचलन

अध्याय 1: समुच्चय सिद्धांत, संबंध एवं फलन (Sets, Relations & Functions)

1.1 समुच्चय सिद्धांत की मूल अवधारणाएँ एवं प्रकार (Fundamentals of Set Theory)

समुच्चय (Set) सुपरिभाषित (Well-defined) एवं सुस्पष्ट वस्तुओं या अवयवों (Elements) का संग्रह होता है। किसी समुच्चय में अवयवों की पुनरावृत्ति नहीं की जाती है और अवयवों का क्रम बदलने से समुच्चय नहीं बदलता है।

- **गणन संख्या (Cardinal Number `n(A)`):** किसी परिमित समुच्चय `A` में उपस्थित भिन्न अवयवों की कुल संख्या को `n(A)` या `|A|` से प्रदर्शित करते हैं।
- **रिक्त समुच्चय (Empty / Null / Void Set `φ`):** वह समुच्चय जिसमें एक भी अवयव न हो, अर्थात `φ = {}` तथा `n(φ) = 0`। ध्यान दें कि `{0}` और `{φ}` एकल समुच्चय (Singleton Sets) हैं, रिक्त समुच्चय नहीं।
- **उपसमुच्चय एवं अधिसमुच्चय (Subsets & Supersets):** यदि समुच्चय `A` का प्रत्येक अवयव समुच्चय `B` में भी उपस्थित हो, तो `A` को `B` का उपसमुच्चय कहते हैं (`A ⊆ B`)।
- **घात समुच्चय (Power Set `P(A)`):** किसी समुच्चय `A` के सभी संभव उपसमुच्चयों के समुच्चय को घात समुच्चय `P(A)` कहते हैं।

समुच्चय गणना के 1D मानक सूत्र (Standard 1D Formulas for Sets)

1. **कुल उपसमुच्चयों की संख्या:** यदि `n(A) = m` हो, तो कुल उपसमुच्चयों की संख्या `= n(P(A)) = 2^m`
2. **उचित उपसमुच्चयों (Proper Subsets) की संख्या:** स्वयं समुच्चय `A` को छोड़कर शेष उपसमुच्चय `= 2^m - 1`
3. **अरिक्त उपसमुच्चयों (Non-empty Subsets) की संख्या:** रिक्त समुच्चय `φ` को छोड़कर शेष उपसमुच्चय `= 2^m - 1`
4. **अरिक्त उचित उपसमुच्चयों की संख्या:** `φ` तथा `A` दोनों को छोड़कर शेष उपसमुच्चय `= 2^m - 2`
5. **दो समुच्चयों का सम्मिलन (Union of Two Sets):** `n(A ∪ B) = n(A) + n(B) - n(A ∩ B)`
6. **असंयुक्त समुच्चयों (Disjoint Sets `A ∩ B = φ`) के लिए:** `n(A ∪ B) = n(A) + n(B)`
7. **अंतर समुच्चय (Difference of Sets):** केवल `A` में उपस्थित अवयव `n(A - B) = n(A) - n(A ∩ B)`
8. **सममित अंतर (Symmetric Difference `A Δ B`):** केवल एक में उपस्थित अवयव `n(A Δ B) = n(A - B) + n(B - A) = n(A ∪ B) - n(A ∩ B)`
9. **तीन समुच्चयों का सम्मिलन सूत्र:** `n(A ∪ B ∪ C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A ∩ B) - n(B ∩ C) - n(C ∩ A) + n(A ∩ B ∩ C)`
10. **केवल `A` में उपस्थित अवयव (तीन समुच्चयों में):** `n(केवल A) = n(A) - n(A ∩ B) - n(A ∩ C) + n(A ∩ B ∩ C)`
11. **ठीक दो समुच्चयों में उपस्थित अवयव:** `n(ठीक दो में) = n(A ∩ B) + n(B ∩ C) + n(C ∩ A) - 3 × n(A ∩ B ∩ C)`
12. **कम-से-कम दो समुच्चयों में उपस्थित अवयव:** `n(कम-से-कम दो में) = n(A ∩ B) + n(B ∩ C) + n(C ∩ A) - 2 × n(A ∩ B ∩ C)`
13. **डी-मॉर्गन का प्रथम नियम (De Morgan's First Law):** `(A ∪ B)' = A' ∩ B'` तथा `n(A' ∩ B') = n(U) - n(A ∪ B)`
14. **डी-मॉर्गन का द्वितीय नियम (De Morgan's Second Law):** `(A ∩ B)' = A' ∪ B'` तथा `n(A' ∪ B') = n(U) - n(A ∩ B)`

15. **वितरण नियम (Distributive Laws):** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ तथा $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

1.2 कार्तीय गुणन एवं संबंध (Cartesian Product & Relations)

यदि A और B दो अरिक्त समुच्चय हों, तो उनका कार्तीय गुणन $A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ तथा } b \in B\}$ क्रमित युग्मों का समुच्चय होता है। समुच्चय A से B में कोई भी संबंध R, कार्तीय गुणन $A \times B$ का एक उपसमुच्चय होता है ($R \subseteq A \times B$)।

- **कार्तीय गुणन में अवयव:** यदि $n(A) = p$ और $n(B) = q$, तो $n(A \times B) = p \times q$
- **कुल संबंधों की संख्या:** समुच्चय A से B में परिभाषित कुल संबंधों की संख्या $= 2^{(p \times q)}$
- A **तथा** B **में** k **उभयनिष्ठ अवयव होने पर:** $(A \times B)$ तथा $(B \times A)$ में उभयनिष्ठ अवयवों की संख्या $= n((A \times B) \cap (B \times A)) = k^2$

समुच्चय A ($n(A) = n$) पर परिभाषित संबंधों के प्रकार एवं गणना सूत्र

1. **स्वतुल्य संबंध (Reflexive Relation):** प्रत्येक $a \in A$ के लिए $(a, a) \in R$ होना अनिवार्य है।
   - कुल स्वतुल्य संबंधों की संख्या $= 2^{(n^2 - n)} = 2^{(n(n - 1))}$
2. **अस्वतुल्य संबंध (Irreflexive Relation):** किसी भी $a \in A$ के लिए $(a, a) \notin R$ हो।
   - कुल अस्वतुल्य संबंधों की संख्या $= 2^{(n(n - 1))}$
3. **सममित संबंध (Symmetric Relation):** यदि $(a, b) \in R$ है, तो $(b, a) \in R$ भी होना चाहिए।
   - कुल सममित संबंधों की संख्या $= 2^{(n(n + 1) / 2)}$
4. **प्रति-सममित संबंध (Anti-Symmetric Relation):** यदि $(a, b) \in R$ और $(b, a) \in R$ दोनों हों, तो यह तभी संभव हो जब $a = b$ हो।
   - कुल प्रति-सममित संबंधों की संख्या $= 2^n \times 3^{(n(n - 1) / 2)}$
5. **असममित संबंध (Asymmetric Relation):** यदि $(a, b) \in R$ है, तो $(b, a) \notin R$ हो (इसमें विकर्ण अवयव (a, a) भी नहीं हो सकते)।
   - कुल असममित संबंधों की संख्या $= 3^{(n(n - 1) / 2)}$
6. **स्वतुल्य एवं सममित दोनों संबंधों की संख्या:** $= 2^{(n(n - 1) / 2)}$
7. **संक्रामक संबंध (Transitive Relation):** यदि $(a, b) \in R$ तथा $(b, c) \in R$ हो, तो $(a, c) \in R$ होना चाहिए।
8. **तुल्यता संबंध (Equivalence Relation):** वह संबंध जो **स्वतुल्य, सममित एवं संक्रामक** तीनों हो, तुल्यता संबंध कहलाता है।
   - समुच्चय में n अवयव होने पर तुल्यता संबंधों की संख्या **बेल संख्या (Bell Number B_n)** के बराबर होती है:
   - $n = 1$ के लिए $B_1 = 1$; $n = 2$ के लिए $B_2 = 2$; $n = 3$ के लिए $B_3 = 5$; $n = 4$ के लिए $B_4 = 15$; $n = 5$ के लिए $B_5 = 52$।
9. **आंशिक क्रम संबंध (Partial Order Relation):** वह संबंध जो **स्वतुल्य, प्रति-सममित एवं संक्रामक** तीनों हो।

1.3 फलन: डोमेन, रेंज एवं एकैकी-आच्छादक वर्गीकरण (Functions: Domain, Range & Classification)

अध्याय के प्रमुख अध्ययन स्तंभ — 1.3 फलन: डोमेन, रेंज एवं एकैकी-आच्छादक वर्गीकरण (Functions: Domain, Range & Classification)

प्रमुख अध्ययन बिंदु 1
डोमेन (प्रांत) ज्ञात करने के 5 स्वर्णिम नियम

प्रमुख अध्ययन बिंदु 2
फलनों के प्रकार एवं गणना के महत्वपूर्ण सूत्र (यदि n(A) = m तथा n(B) = n)

समुच्चय A से B में संबंध f एक फलन (f : A → B) कहलाता है यदि समुच्चय A के प्रत्येक अवयव का समुच्चय B में **एक और केवल एक (अद्वितीय)** प्रतिबिंब हो। यहाँ A को **प्रांत (Domain)** और B को **सह-प्रांत (Co-domain)** कहते हैं, जबकि A के अवयवों के वास्तविक प्रतिबिंबों के समुच्चय f(A) को **परिसर (Range)** कहते हैं (Range ⊆ Co-domain)।

डोमेन (प्रांत) ज्ञात करने के 5 स्वर्णिम नियम

1. **हर शून्य न हो:** फलन 1 / f(x) के परिभाषित होने के लिए f(x) ≠ 0
2. **वर्गमूल के भीतर धनात्मक या शून्य:** फलन √(f(x)) के लिए f(x) ≥ 0
3. **हर में वर्गमूल होने पर:** फलन 1 / √(f(x)) के लिए f(x) > 0
4. **लघुगणकीय फलन:** log_a(f(x)) के लिए f(x) > 0 , a > 0 तथा a ≠ 1
5. **प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन:** sin^-1(f(x)) या cos^-1(f(x)) के लिए -1 ≤ f(x) ≤ 1

फलनों के प्रकार एवं गणना के महत्वपूर्ण सूत्र (यदि n(A) = m तथा n(B) = n)

1. **कुल फलनों की संख्या (A से B में):** = n^m = [n(B)]^[n(A)]
2. **एकैकी फलन (One-One / Injective Function):** यदि भिन्न अवयवों के प्रतिबिंब भिन्न हों, अर्थात f(x1) = f(x2) ⇒ x1 = x2 (या f'(x) > 0 अथवा f'(x) < 0 सर्वत्र एकदिष्ट हो)।
   - कुल एकैकी फलनों की संख्या: यदि n ≥ m हो तो nPm = n! / (n - m)! , और यदि n < m हो तो 0 ।
3. **बहु-एकैकी फलन (Many-One Function):** जब प्रांत के दो या अधिक अवयवों का सह-प्रांत में एक ही प्रतिबिंब हो।
   - कुल बहु-एकैकी फलनों की संख्या = n^m - (एकैकी फलनों की संख्या)
4. **आच्छादक फलन (Onto / Surjective Function):** जब सह-प्रांत का प्रत्येक अवयव किसी-न-किसी अवयव का प्रतिबिंब हो, अर्थात Range = Co-domain ।
   - कुल आच्छादक फलनों की संख्या (यदि m ≥ n): = ∑ [r = 0 से n] (-1)^r × nCr × (n - r)^m
   - विशेष स्थिति (n(B) = 2 होने पर): आच्छादक फलनों की संख्या = 2^m - 2
   - यदि m < n हो, तो आच्छादक फलनों की संख्या = 0
5. **अंतःक्षेपी फलन (Into Function):** जब सह-प्रांत में कम-से-कम एक अवयव खाली छूट जाए (Range ⊂ Co-domain)।
   - कुल अंतःक्षेपी फलनों की संख्या = n^m - (आच्छादक फलनों की संख्या)
6. **एकैकी-आच्छादक फलन (Bijective Function):** वह फलन जो एकैकी और आच्छादक दोनों हो। केवल एकैकी-आच्छादक फलन ही **व्युत्क्रमणीय (Invertible)** होते हैं।
   - कुल एकैकी-आच्छादक फलनों की संख्या: यदि m = n हो तो n! , और यदि m ≠ n हो तो 0 ।

1.4 तुलनात्मक सारणी: मानक फलनों के प्रांत, परिसर एवं गुणधर्म

फलन का नाम (Function Name)	गणितीय सूत्र (1D Notation)	प्रांत (Domain)	परिसर (Range)	मुख्य परीक्षा गुणधर्म (Key Properties)		
मापांक फलन (Modulus)	`f(x) = \	x\	`	R (सभी वास्तविक संख्याएँ)	[0, ∞)	सम फलन (Even), x = 0 पर सतत किंतु अवकलनीय नहीं
महत्तम पूर्णांक (GIF)	f(x) = [x]	R	Z (सभी पूर्णांक)	सीढ़ीदार फलन, सभी पूर्णांक बिंदुओं x ∈ Z पर असतत		
भिन्नात्मक भाग (Fractional)	f(x) = {x} = x - [x]	R	[0, 1)	आवर्ती फलन जिसका आवर्तकाल (Period) = 1 होता है		
चिह्न फलन (Signum)	`f(x) = \	x\	/ x (x ≠ 0), 0 (x = 0`)	R	{-1, 0, 1}	विषम फलन (Odd), बहु-एकैकी फलन, x = 0 पर असतत
चरघातांकी फलन (Exponential)	f(x) = a^x (a > 0, a ≠ 1)	R	(0, ∞)	सदैव धनात्मक, a > 1 पर वर्धमान, 0 < a < 1 पर ह्रासमान		
लघुगणकीय फलन (Logarithmic)	f(x) = log_a(x) (a > 0, a ≠ 1)	(0, ∞)	R	चरघातांकी फलन का प्रतिलोम, ग्राफ बिंदु (1, 0) से गुजरता है		
व्युत्क्रम फलन (Reciprocal)	f(x) = 1 / x	R - {0}	R - {0}	विषम फलन, प्रथम व तृतीय चतुर्थांश में आयताकार अतिपरवलय		
द्विघात व्यंजक (Quadratic)	f(x) = ax^2 + bx + c (a > 0)	R	[-D / (4a), ∞)	जहाँ D = b^2 - 4ac ; यह R पर बहु-एकैकी फलन है		

1.5 IUC सुपर-फास्ट शॉर्ट-ट्रिक्स (Chapter 1 Short-Tricks)

• **ट्रिक 1 (मोबियस या रैखिक भिन्नात्मक फलन का प्रतिलोम व परिसर):** यदि f(x) = (ax + b) / (cx + d) हो, तो:

• इसका प्रांत (Domain) = R - {-d/c} तथा परिसर (Range) = R - {a/c} होता है।

• इसका प्रतिलोम फलन f^-1(x) निकालने के लिए केवल मुख्य विकर्ण के गुणांकों a और d को चिह्न बदलकर आपस में बदल दें: f^-1(x) = (-dx + b) / (cx - a)।

• विशेष स्थिति: यदि d = -a हो (जैसे f(x) = (2x + 3) / (5x - 2)), तो सदैव f^-1(x) = f(x) तथा (fof)(x) = x होता है!

• **ट्रिक 2 (x + 1/x प्रकार के फलन का परिसर):** फलन f(x) = ax + b/x (जहाँ a > 0, b > 0) का परिसर सदैव (-∞, -2√(ab)] ∪ [2√(ab), ∞) होता है। उदाहरणार्थ, x + 1/x का परिसर R - (-2, 2) है।

• **ट्रिक 3 (√(x - a) + √(b - x) का प्रांत व परिसर):** फलन f(x) = √(x - a) + √(b - x) (जहाँ a < b) का प्रांत [a, b] होता है तथा परिसर [√(b - a), √(2(b - a))] होता है।

• **ट्रिक 4 (कार्यात्मक समीकरण पहचान):**

• यदि f(x + y) = f(x) × f(y) हो, तो f(x) = a^x

• यदि f(x × y) = f(x) + f(y) हो, तो f(x) = k × ln(x)

• यदि f(x + y) = f(x) + f(y) हो, तो f(x) = k × x

• यदि $f(x) \times f(1/x) = f(x) + f(1/x)$ हो, तो $f(x) = 1 \pm x^n$

1.6 हल सहित उदाहरण (Solved Examples)

अभ्यास प्रश्न #1 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 1.1: 500 विद्यार्थियों के एक सर्वेक्षण में 280 विद्यार्थी हिंदी समाचार-पत्र और 250 विद्यार्थी अंग्रेजी समाचार-पत्र पढ़ते हैं, जबकि 70 विद्यार्थी दोनों में से कोई भी समाचार-पत्र नहीं पढ़ते हैं। कितने विद्यार्थी दोनों समाचार-पत्र पढ़ते हैं और कितने केवल हिंदी पढ़ते हैं?

हल:

दिया है: $n(U) = 500$, $n(H) = 280$, $n(E) = 250$, तथा $n(H' \cap E') = 70$।

डी-मॉर्गन नियम से: $n(H \cup E) = n(U) - n(H' \cap E') = 500 - 70 = 430$।

अब सूत्र $n(H \cup E) = n(H) + n(E) - n(H \cap E)$ से:

$430 = 280 + 250 - n(H \cap E) \Rightarrow n(H \cap E) = 530 - 430 = 100$ (दोनों समाचार-पत्र पढ़ने वाले)।

केवल हिंदी पढ़ने वाले विद्यार्थी $= n(H) - n(H \cap E) = 280 - 100 = 180$।

अभ्यास प्रश्न #2 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 1.2: फलन $f(x) = \sqrt{(16 - x^2)} / \sqrt{(x^2 - 5x + 6)}$ का प्रांत (Domain) ज्ञात कीजिए।

हल:

अंश के परिभाषित होने के लिए: $16 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 16 \leq 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 4) \leq 0 \Rightarrow x \in [-4, 4]$ ... (समीकरण 1)

हर के परिभाषित होने के लिए: $x^2 - 5x + 6 > 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 3) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$ ... (समीकरण 2)

दोनों अंतरालों का सर्वनिष्ठ (Intersection) लेने पर अभीष्ट प्रांत $= [-4, 2) \cup (3, 4]$।

अभ्यास प्रश्न #3 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 1.3: फलन $f(x) = x^2 / (1 + x^2)$ का परिसर (Range) ज्ञात कीजिए।

हल:

माना $y = x^2 / (1 + x^2) = (1 + x^2 - 1) / (1 + x^2) = 1 - [1 / (1 + x^2)]$।

चूँकि सभी वास्तविक x के लिए $0 \leq x^2 < \infty$, इसलिए $1 \leq 1 + x^2 < \infty$।

व्युत्क्रम लेने पर: $0 < 1 / (1 + x^2) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -1 / (1 + x^2) < 0$।

सभी पक्षों में 1 जोड़ने पर: $0 \leq 1 - [1 / (1 + x^2)] < 1$। अतः परिसर $= [0, 1)$।

अभ्यास प्रश्न #4 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 1.4: यदि फलन $f : R - \{3/5\} \to R - \{2/5\}$ इस प्रकार है कि $f(x) = (2x + 7) / (5x - 3)$, तो $(fof)(2026)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

IUC शॉर्ट-ट्रिक 1 के अनुसार, यहाँ $a = 2$ तथा $d = -3$ है। पर यदि हम प्रतिलोम देखें: $f^{-1}(x) = (3x + 7) / (5x - 2)$।

यहाँ प्रश्न में $(fof)(x)$ पूछा है, तो सीधे मान रखें:

$f(2) = (4 + 7) / (10 - 3) = 11/7$। परंतु यदि फलन $g(x) = (3x + 7) / (5x - 3)$ होता जहाँ $d = -a = -3$, तब $(gog)(x) = x$ होता।

यहाँ $f(x) = (2x + 7) / (5x - 3)$ के लिए $f^{-1}(y)$ और $f(x)$ अलग हैं। यदि प्रश्न में $(f^{-1} \circ f)(2026)$ पूछा जाए, तो चूँकि $(f^{-1} \circ f)(x) = I(x) = x$ (तत्समक फलन), अतः $(f^{-1} \circ f)(2026) = 2026$।

अभ्यास प्रश्न #5 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 1.5: समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ से समुच्चय $B = \{a, b\}$ में कुल कितने आच्छादक फलन (Onto Functions) बनाए जा सकते हैं?

हल:

यहाँ $n(A) = m = 3$ तथा $n(B) = n = 2$।

जब सह-प्रांत में 2 अवयव हों, तो आच्छादक फलनों की संख्या $= 2^m - 2 = 2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$।

1.7 विगत वर्षों के प्रश्न (PYQs — हल सहित)

अभ्यास प्रश्न #6 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 1 [UPSC NDA 2024]: यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$ हो, तो A पर परिभाषित उन संबंधों की संख्या कितनी है जो स्वतुल्य (Reflexive) तथा सममित (Symmetric) दोनों हैं?

(A) 16 (B) 64 (C) 256 (D) 4096

हल (B): यहाँ $n = 4$। स्वतुल्य एवं सममित दोनों होने वाले संबंधों की संख्या $= 2^{n(n-1)/2} = 2^{4 \times 3 / 2} = 2^6 = 64$।

अभ्यास प्रश्न #7 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 2 [CUET UG 2024]: समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ पर ऐसे कितने तुल्यता संबंध (Equivalence Relations) परिभाषित किए जा सकते हैं जिनमें अवयव $(1, 2)$ अवश्य शामिल हो?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5

हल (B): $n = 3$ के लिए कुल तुल्यता संबंध 5 होते हैं (विभाजन: $\{1\},\{2\},\{3\}$; $\{1,2\},\{3\}$; $\{1,3\},\{2\}$; $\{2,3\},\{1\}$; $\{1,2,3\}$)। अवयव $(1, 2)$ केवल उन्हीं तुल्यता संबंधों में होगा जहाँ 1 और 2 एक ही उपसमुच्चय में हों, अर्थात केवल 2 विभाजनों ($\{1, 2\}, \{3\}$ तथा $\{1, 2, 3\}$) में। अतः उत्तर $= 2$।

अभ्यास प्रश्न #8 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 3 [UPSC NDA 2025]: यदि $f(x)$ एक वास्तविक मान फलन इस प्रकार है कि $2 \times f(x) + 3 \times f(-x) = 15 - 4x$, तो $f(2)$ का मान क्या है?

(A) 1 (B) -5 (C) 7 (D) 3

हल (C): दिए गए समीकरण में $x = 2$ रखने पर: $2 \times f(2) + 3 \times f(-2) = 15 - 8 = 7$ ... (1)

अब $x = -2$ रखने पर: $2 \times f(-2) + 3 \times f(2) = 15 + 8 = 23$ ... (2)

समीकरण (2) को 3 से और समीकरण (1) को 2 से गुणा करके घटाने पर:

$(9 - 4) \times f(2) = 69 - 14 \Rightarrow 5 \times f(2) = 55 \Rightarrow f(2) = 11$।

(नोट: यदि विकल्प 11 हो तो 11, और यदि प्रश्न $2f(x) + 3f(-x) = 5 - 4x$ हो तो $5f(2) = 3(13) - 2(-3) = 45 \Rightarrow f(2) = 9$)। यहाँ सटीक गणना से $f(2) = 11$ प्राप्त होता है।

अभ्यास प्रश्न #9 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 4 [Airforce X-Group 2024]: फलन $f(x) = \sin^{-1}(2x - 3)$ का प्रांत (Domain) क्या है?

(A) $[-1, 1]$ (B) $[1, 2]$ (C) $[0, 1]$ (D) $[1, 3]$

हल (B): sin^-1(u) के परिभाषित होने के लिए -1 ≤ 2x - 3 ≤ 1 ⇒ 2 ≤ 2x ≤ 4 ⇒ 1 ≤ x ≤ 2। अतः प्रांत = [1, 2]।

अभ्यास प्रश्न #10 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 5 [UP PGT Maths]: फलन f(x) = √(x - 3) + √(7 - x) का परिसर (Range) क्या है?

(A) [2, 2√2] (B) [0, 2] (C) [2, 4] (D) [√3, √7]

हल (A): IUC शॉर्ट-ट्रिक 3 से, यहाँ a = 3, b = 7 तथा b - a = 4। अतः परिसर = [√(b - a), √(2(b - a))] = [√4, √8] = [2, 2√2]।

अभ्यास प्रश्न #11 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 6 [UPSC NDA 2023]: यदि दो परिमित समुच्चयों A और B में अवयवों की संख्या क्रमशः m और n है तथा A के कुल उपसमुच्चयों की संख्या B के कुल उपसमुच्चयों की संख्या से 112 अधिक है, तो (m, n) का मान क्या है?

(A) (7, 4) (B) (7, 5) (C) (6, 4) (D) (8, 5)

हल (A): प्रश्नानुसार 2^m - 2^n = 112 ⇒ 2^n × (2^(m - n) - 1) = 16 × 7 = 2^4 × (2^3 - 1)।

तुलना करने पर n = 4 तथा m - n = 3 ⇒ m = 7। अतः (m, n) = (7, 4)।

अध्याय 2: सम्मिश्र संख्याएँ, द्विघात समीकरण एवं द्विआधारी संख्याएँ (Complex Numbers, Quadratic Equations & Binary Numbers)

2.1 आयोटा (i) की घातें एवं सम्मिश्र संख्या का बीजगणित

यूलर (Euler) ने समीकरण x^2 + 1 = 0 के मूल को i = √(-1) नाम दिया, जिसे काल्पनिक इकाई (Iota) कहते हैं।

- **आयोटा के चक्रीय मान:** i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1। सामान्यतः i^(4k + r) = i^r।
- **चार क्रमागत घातों का योग:** किसी भी पूर्णांक n के लिए i^n + i^(n+1) + i^(n+2) + i^(n+3) = 0।
- **महत्वपूर्ण चेतावनी:** √a × √b = √(ab) केवल तभी सत्य है जब कम-से-कम एक संख्या अऋणात्मक हो। यदि a < 0 और b < 0 दोनों ऋणात्मक हों, तो √a × √b = -√(ab) होता है (जैसे √(-4) × √(-9) = 2i × 3i = -6)।
- **मानक रूप:** z = x + iy, जहाँ x = Re(z) वास्तविक भाग और y = Im(z) काल्पनिक भाग है।
- **संयुग्मी (Conjugate z̄):** z̄ = x - iy। ध्यान दें: z + z̄ = 2 × Re(z), z - z̄ = 2i × Im(z), तथा z × z̄ = |z|^2 = x^2 + y^2।
- **गुणात्मक प्रतिलोम (Multiplicative Inverse):** z^-1 = 1 / z = z̄ / |z|^2 = (x - iy) / (x^2 + y^2)।

2.2 मापांक, कोणांक एवं ध्रुवीय/ऑयलर रूप (Modulus, Argument & Polar Form)

अध्याय के प्रमुख अध्ययन स्तंभ — 2.2 मापांक, कोणांक एवं ध्रुवीय/ऑयलर रूप (Modulus, Argument & Polar Form)

प्रमुख अध्ययन बिंदु 1	प्रमुख अध्ययन बिंदु 2
मापांक एवं कोणांक के 1D मानक सूत्र	चतुर्थांश के अनुसार मुख्य कोणांक θ ∈ (-π, π] (जहाँ α = tan^-1(|y / x|))

आर्गंड तल (Argand Plane) में बिंदु P(x, y) की मूलबिंदु से दूरी को मापांक r = |z| = √(x^2 + y^2) कहते हैं, तथा OP रेखा द्वारा धनात्मक X-अक्ष के साथ बनाए गए कोण θ को कोणांक arg(z) कहते हैं। मुख्य कोणांक amp(z) सदैव अंतराल (-π, π] में होता है।

मापांक एवं कोणांक के 1D मानक सूत्र

1. **गुणन व भाग में मापांक:** $|z1 \times z2| = |z1| \times |z2|$ तथा $|z1 / z2| = |z1| / |z2|$ तथा $|z^n| = |z|^n$
2. **समांतर चतुर्भुज नियम:** $|z1 + z2|^2 + |z1 - z2|^2 = 2 \times (|z1|^2 + |z2|^2)$
3. **त्रिभुज असमिका (Triangle Inequality):** $||z1| - |z2|| \le |z1 \pm z2| \le |z1| + |z2|$
4. **कोणांक के लघुगणकीय गुणधर्म:** $\arg(z1 \times z2) = \arg(z1) + \arg(z2) + 2k\pi$, $\arg(z1 / z2) = \arg(z1) - \arg(z2) + 2k\pi$, तथा $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
5. **ध्रुवीय एवं ऑयलर रूप:** $z = r \times (\cos\theta + i \sin\theta) = r \times e^{i\theta}$
6. **डी-मायवर का प्रमेय (De Moivre's Theorem):** $(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ तथा $(\cos\theta - i \sin\theta)^n = \cos(n\theta) - i \sin(n\theta)$

चतुर्थांश के अनुसार मुख्य कोणांक $\theta \in (-\pi, \pi]$ (जहाँ $\alpha = \tan^{-1}(|y / x|)$)

चतुर्थांश (Quadrant)	x तथा y के चिह्न	मुख्य कोणांक $\theta = \arg(z)$ का सूत्र	उदाहरण (z)	मुख्य कोणांक का मान
प्रथम चतुर्थांश (Q1)	$x > 0, y > 0$	$\theta = \alpha$	$z = 1 + \sqrt{3}\,i$	$\theta = \pi / 3$ ($60°$)
द्वितीय चतुर्थांश (Q2)	$x < 0, y > 0$	$\theta = \pi - \alpha$	$z = -1 + \sqrt{3}\,i$	$\theta = \pi - \pi/3 = 2\pi / 3$ ($120°$)
तृतीय चतुर्थांश (Q3)	$x < 0, y < 0$	$\theta = -(\pi - \alpha) = \alpha - \pi$	$z = -1 - \sqrt{3}\,i$	$\theta = -2\pi / 3$ ($-120°$)
चतुर्थ चतुर्थांश (Q4)	$x > 0, y < 0$	$\theta = -\alpha$	$z = 1 - \sqrt{3}\,i$	$\theta = -\pi / 3$ ($-60°$)

2.3 इकाई के घनमूल (Cube Roots of Unity — $1, \omega, \omega^2$)

समीकरण $z^3 = 1$ के तीन मूल होते हैं: 1, $\omega = (-1 + i\sqrt{3}) / 2$ तथा $\omega^2 = (-1 - i\sqrt{3}) / 2$।

- **मूलभूत सर्वसमिकाएँ:** $\omega^3 = 1$ तथा $1 + \omega + \omega^2 = 0$ (अत: $1 + \omega = -\omega^2$, $1 + \omega^2 = -\omega$, $\omega + \omega^2 = -1$)।
- **तीन के गुणज का नियम:** यदि n संख्या 3 का गुणज हो तो $1 + \omega^n + \omega^{(2n)} = 3$, और यदि n संख्या 3 का गुणज न हो तो $1 + \omega^n + \omega^{(2n)} = 0$।
- **महत्वपूर्ण गुणनखंड:**
- $x^2 + x + 1 = (x - \omega)(x - \omega^2)$
- $x^2 - x + 1 = (x + \omega)(x + \omega^2)$
- $x^2 + xy + y^2 = (x - y\omega)(x - y\omega^2)$
- $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x + y\omega + z\omega^2)(x + y\omega^2 + z\omega)$
- **ज्यामितीय गुण:** इकाई के तीनों घनमूल आर्गंड तल में इकाई वृत्त ($|z| = 1$) पर एक **समबाहु त्रिभुज (Equilateral Triangle)** के शीर्ष बनाते हैं जिसकी प्रत्येक भुजा $\sqrt{3}$ इकाई और क्षेत्रफल $(3\sqrt{3}) / 4$ वर्ग इकाई होता है।
- **समबाहु त्रिभुज की शर्त:** यदि $z1, z2, z3$ किसी समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हों और परिकेंद्र $z0$ हो, तो $z1^2 + z2^2 + z3^2 = z1 \times z2 + z2 \times z3 + z3 \times z1$ तथा $z1^2 + z2^2 + z3^2 = 3 \times z0^2$।

2.4 द्विघात समीकरण ($ax^2 + bx + c = 0$, जहाँ $a \neq 0$)

- **श्रीधराचार्य सूत्र:** $x = [-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}] / (2a)$ जहाँ $D = b^2 - 4ac$ विविक्तकर (Discriminant) है।

- **मूलों एवं गुणांकों में संबंध (यदि मूल α व β हों):**
- मूलों का योग: $S = \alpha + \beta = -b / a$
- मूलों का गुणनफल: $P = \alpha \times \beta = c / a$
- मूलों का अंतर: $|\alpha - \beta| = \sqrt{[(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta]} = \sqrt{D} / |a|$
- **मूल ज्ञात होने पर समीकरण निर्माण:** $x^2 - (\text{मूलों का योग})x + (\text{मूलों का गुणनफल}) = 0$ अर्थात $x^2 - Sx + P = 0$।
- **सममित व्यंजकों के सूत्र:**
- $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$
- $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2$
- **उभयनिष्ठ मूलों (Common Roots) की शर्तें** (समीकरण $a1\,x^2 + b1\,x + c1 = 0$ तथा $a2\,x^2 + b2\,x + c2 = 0$ के लिए):

1. **दोनों मूल उभयनिष्ठ होने की शर्त:** $a1 / a2 = b1 / b2 = c1 / c2$
2. **केवल एक मूल उभयनिष्ठ होने की शर्त:** $(c1 \times a2 - c2 \times a1)^2 = (a1 \times b2 - a2 \times b1) \times (b1 \times c2 - b2 \times c1)$

2.5 द्विआधारी संख्या प्रणाली (Binary Number System — विशेष रूप से UPSC NDA के लिए)

द्विआधारी प्रणाली का आधार (Base / Radix) 2 होता है और इसमें केवल दो अंकों 0 तथा 1 का प्रयोग होता है।

- **दशमलव से द्विआधारी रूपांतरण:** पूर्णांक भाग को 2 से क्रमिक भाग देकर शेषफलों को नीचे से ऊपर की ओर लिखें; दशमलव भिन्नात्मक भाग को 2 से क्रमिक गुणा करके पूर्णांक भाग को ऊपर से नीचे की ओर लिखें।
- उदाहरण: $(25)_{10} = (11001)_2$ तथा $(0.625)_{10} = (0.101)_2$, अतः $(25.625)_{10} = (11001.101)_2$।
- **द्विआधारी से दशमलव रूपांतरण:** दाएँ से बाएँ प्रत्येक बिट को $2^0, 2^1, 2^2, \ldots$ से और दशमलव बिंदु के बाद $2^{-1}, 2^{-2}, \ldots$ से गुणा करके जोड़ें।
- **द्विआधारी योग व घटाव के नियम:** $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 10$ (योग 0, हासिल 1), तथा $1 + 1 + 1 = 11$ (योग 1, हासिल 1)।
- **1's पूरक (1's Complement):** सभी 0 को 1 से और 1 को 0 से बदल दें।
- **2's पूरक (2's Complement):** $1\text{'s पूरक} + 1$ (या दाएँ से पहले 1 तक के बिट्स को वैसा ही रखें और उसके बाईं ओर के सभी बिट्स को पलट दें)।

2.6 IUC सुपर-फास्ट शॉर्ट-ट्रिक्स (Chapter 2 Short-Tricks)

- **ट्रिक 1 (सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ का वर्गमूल 5 सेकंड में):**

$\sqrt{(x \pm iy)} = \pm\,[\,\sqrt{((|z| + x) / 2)} \pm i \times \sqrt{((|z| - x) / 2)}\,]$ जहाँ बीच का चिह्न y के चिह्न के समान होता है।

- **ट्रिक 2 ($(1 + i) / (1 - i)$ एवं $(1 - i) / (1 + i)$ के सीधे मान):**

सदैव याद रखें: $(1 + i) / (1 - i) = i$, $(1 - i) / (1 + i) = -i$, $(1 + i)^2 = 2i$, तथा $(1 - i)^2 = -2i$।

- **ट्रिक 3 (द्विघात समीकरण में मूलों का रूपांतरण):** यदि $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α, β हों, तो:
- मूल $1/\alpha, 1/\beta$ वाला समीकरण (a और c को बदलें): $cx^2 + bx + a = 0$
- मूल $-\alpha, -\beta$ वाला समीकरण (b का चिह्न बदलें): $ax^2 - bx + c = 0$

• यदि एक मूल दूसरे का k गुना हो (β = kα), तो अचूक शर्त है: k × b^2 = (k + 1)^2 × a × c ।

2.7 हल सहित उदाहरण (Solved Examples)

अभ्यास प्रश्न #12 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 2.1: सम्मिश्र संख्या z = -7 + 24i का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल:

यहाँ x = -7 , y = 24 , तथा |z| = √((-7)^2 + 24^2) = √(49 + 576) = √625 = 25 ।

IUC शॉर्ट-ट्रिक 1 से: √(-7 + 24i) = ± [√((25 - 7) / 2) + i × √((25 - (-7)) / 2)] = ± [√9 + i × √16] = ± (3 + 4i) ।

अभ्यास प्रश्न #13 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 2.2: यदि ω इकाई का एक काल्पनिक घनमूल हो, तो (1 - ω + ω^2)^5 + (1 + ω - ω^2)^5 का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

चूँकि 1 + ω + ω^2 = 0 , अतः 1 + ω^2 = -ω तथा 1 + ω = -ω^2 ।

व्यंजक = (-ω - ω)^5 + (-ω^2 - ω^2)^5 = (-2ω)^5 + (-2ω^2)^5 = -32 × (ω^5 + ω^10) = -32 × (ω^2 + ω) = -32 × (-1) = 32 ।

अभ्यास प्रश्न #14 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 2.3: यदि समीकरण x^2 - px + 8 = 0 के मूलों का अंतर 2 हो, तो p का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

मूलों के अंतर के सूत्र |α - β| = √D / |a| से: 2 = √(p^2 - 32) / 1 ⇒ p^2 - 32 = 4 ⇒ p^2 = 36 ⇒ p = ±6 ।

अभ्यास प्रश्न #15 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 2.4: यदि |z - 4 / z| = 2 हो, तो |z| का अधिकतम मान क्या होगा?

हल:

मानक शॉर्टकट सूत्र: यदि |z ± a / z| = b (जहाँ a > 0, b > 0) हो, तो |z| का अधिकतम व न्यूनतम मान [±b + √(b^2 + 4a)] / 2 होता है।

यहाँ a = 4 तथा b = 2 रखने पर: |z|_max = [2 + √(4 + 16)] / 2 = (2 + 2√5) / 2 = √5 + 1 ।

अभ्यास प्रश्न #16 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 2.5: द्विआधारी संख्या (101101)_2 और (11011)_2 का योग दशमलव पद्धति में कितना होगा?

हल:

(101101)_2 = 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 = 45 तथा (11011)_2 = 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 27 ।

अतः दशमलव योग = 45 + 27 = 72 (जिसका द्विआधारी रूप (1001000)_2 है)।

2.8 विगत वर्षों के प्रश्न (PYQs — हल सहित)

अभ्यास प्रश्न #17 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 1 [UPSC NDA 2024]: न्यूनाधिक छोटा धनात्मक पूर्णांक n क्या है जिसके लिए $[(1 + i) / (1 - i)]^n = 1$ हो?

(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 1

हल (B): चूँकि $(1 + i) / (1 - i) = i$, अतः $i^n = 1$। सबसे छोटा धनात्मक पूर्णांक $n = 4$ है।

अभ्यास प्रश्न #18 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 2 [UPSC NDA 2025]: यदि समीकरण $3x^2 - \text{विस्तृत अध्ययन नोट्स} + k = 0$ का एक मूल दूसरे मूल का व्युत्क्रम (Reciprocal) हो, तो k का मान क्या है?

(A) 10 (B) -3 (C) 3 (D) $1/3$

हल (C): मूल एक-दूसरे के व्युत्क्रम (α तथा $1/\alpha$) होने पर गुणनफल $= \alpha \times (1/\alpha) = 1 = c / a = k / 3 \Rightarrow k = 3$।

अभ्यास प्रश्न #19 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 3 [Airforce X-Group 2024]: $\sum [n = 1 \text{ से } 13] (i^n + i^{(n+1)})$ का मान जहाँ $i = \sqrt{(-1)}$ है, क्या होगा?

(A) i (B) $i - 1$ (C) $-i$ (D) 0

हल (B): चार-चार क्रमागत घातों का योग शून्य होता है, इसलिए 13 पदों में से 12 पद शून्य हो जाएँगे और केवल प्रथम पद ($n = 1$) बचेगा: $= i^1 + i^2 = i - 1$।

अभ्यास प्रश्न #20 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 4 [TGT Maths 2023]: यदि z एक ऐसी सम्मिश्र संख्या है कि $|(z - 5i) / (z + 5i)| = 1$, तो z का बिंदुपथ (Locus) कहाँ स्थित है?

(A) वास्तविक अक्ष (X-अक्ष) पर (B) काल्पनिक अक्ष (Y-अक्ष) पर (C) त्रिज्या 5 के वृत्त पर (D) सरल रेखा $y = 5$ पर

हल (A): $|z - 5i| = |z - (-5i)|$ का ज्यामितीय अर्थ है कि बिंदु z बिंदुओं $(0, 5)$ तथा $(0, -5)$ से समदूरस्थ है। इन दोनों बिंदुओं का लंब समद्विभाजक X-अक्ष ($y = 0$, अर्थात वास्तविक अक्ष) है।

अभ्यास प्रश्न #21 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 5 [UPSC NDA 2024]: द्विआधारी संख्या $(11101.011)_2$ का दशमलव समतुल्य मान क्या है?

(A) 29.375 (B) 29.625 (C) 27.375 (D) 31.375

हल (A): पूर्णांक भाग $= 16 + 8 + 4 + 0 + 1 = 29$। भिन्नात्मक भाग $= 0\times(1/2) + 1\times(1/4) + 1\times(1/8) = 0.25 + 0.125 = 0.375$। अतः मान $= 29.375$।

अभ्यास प्रश्न #22 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 6 [PGT Maths]: यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूलों का अनुपात $2 : 3$ हो, तो निम्न में से कौन-सा संबंध सत्य है?

(A) $6b^2 = 25ac$ (B) $5b^2 = 6ac$ (C) $25b^2 = 6ac$ (D) $3b^2 = 10ac$

हल (A): IUC शॉर्ट-ट्रिक 3 से, यदि मूल $m : n$ के अनुपात में हों, तो $m \times n \times b^2 = (m + n)^2 \times a \times c$। यहाँ $m = 2, n = 3$ रखने पर $2 \times 3 \times b^2 = (2 + 3)^2 \times ac \Rightarrow 6b^2 = 25ac$।

अध्याय 3: अनुक्रम एवं श्रेणी (AP, GP, HP), क्रमचय-संचय, द्विपद प्रमेय एवं लघुगणक

3.1 समांतर, गुणोत्तर एवं हरात्मक श्रेणी (AP, GP & HP)

जब किसी अनुक्रम के पद एक निश्चित गणितीय नियम से बढ़ते या घटते हैं, तो उसे श्रेणी (Progression) कहते हैं।

AP, GP तथा HP की समेकित तुलनात्मक सारणी (1D Formulas)

गुणधर्म / मानक पद	समांतर श्रेणी (AP)	गुणोत्तर श्रेणी (GP)	हरात्मक श्रेणी (HP)
मानक रूप	a, a+d, a+2d, ...	a, ar, ar^2, ...	1/a, 1/(a+d), 1/(a+2d), ...
नियम / पहचान	T_n - T_(n-1) = d (सार्व अंतर)	T_n / T_(n-1) = r (सार्व अनुपात)	पदों के व्युत्क्रम समांतर श्रेणी (AP) में होते हैं
n -वाँ पद (T_n)	T_n = a + (n - 1)d	T_n = a × r^(n - 1)	T_n = 1 / [a + (n - 1)d]
n पदों का योग (S_n)	S_n = (n/2) × [2a + (n - 1)d] = (n/2) × (a + l)	S_n = a × (r^n - 1) / (r - 1) (r ≠ 1)	HP के n पदों के योग का कोई सीधा बंद सूत्र नहीं है
अनंत पदों का योग (S_∞)	परिभाषित नहीं (अपसारी)	S_∞ = a / (1 - r) (केवल जब | r| < 1`)	परिभाषित नहीं
दो राशियों a, b का माध्य	समांतर माध्य A = (a + b) / 2	गुणोत्तर माध्य G = √(a × b)	हरात्मक माध्य H = (2ab) / (a + b)
तीन क्रमागत पदों का चयन	a - d, a, a + d	a / r, a, ar	(a - d), a, (a + d) के व्युत्क्रम

माध्यों के संबंध एवं विशेष श्रेणियों के योग के महत्वपूर्ण सूत्र

1. **AM, GM एवं HM में संबंध:** धनात्मक संख्याओं के लिए सदैव AM ≥ GM ≥ HM तथा G^2 = A × H होता है। (समानता AM = GM = HM केवल तभी होती है जब सभी संख्याएँ बराबर हों)।

2. a और b के बीच n समांतर माध्य (A1, A2, ..., An): सभी n समांतर माध्यों का योग = n × [(a + b) / 2] (अर्थात एकल समांतर माध्य का n गुना)।

3. a और b के बीच n गुणोत्तर माध्य (G1, G2, ..., Gn): सभी n गुणोत्तर माध्यों का गुणनफल = (√(ab))^n (अर्थात एकल गुणोत्तर माध्य की n -वीं घात)।

4. **प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग:** ∑n = 1 + 2 + 3 + ... + n = n(n + 1) / 2

5. **प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग:** ∑n^2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = n(n + 1)(2n + 1) / 6

6. **प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घनों का योग:** ∑n^3 = 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = [n(n + 1) / 2]^2

7. **प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं का योग:** 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2

3.2 क्रमचय एवं संचय (Permutations & Combinations)

• **क्रमचय (Permutation — विन्यास / सजावट, जहाँ क्रम महत्वपूर्ण है):** `n` भिन्न वस्तुओं में से `r` वस्तुओं को लेकर बनाए गए क्रमचयों की संख्या:

`nPr = n! / (n - r)!` (जहाँ `0! = 1` तथा `n! = n × (n - 1) × ... × 3 × 2 × 1`)।

• **समरूप वस्तुओं का क्रमचय:** यदि `n` वस्तुओं में `p` वस्तुएँ एक प्रकार की, `q` दूसरे प्रकार की हों, तो कुल क्रमचय `= n! / (p! × q!)`।

• **पुनरावृत्ति की अनुमति होने पर:** `n` भिन्न वस्तुओं में से `r` स्थानों को भरने के कुल तरीके `= n^r`।

• **वृत्तीय क्रमचय (Circular Permutation):**

• `n` व्यक्तियों को एक गोल मेज के चारों ओर बैठाने के तरीके (वामावर्त व दक्षिणावर्त भिन्न हों): `= (n - 1)!`

• फूलों की माला या मोतियों के हार में पिरोने के तरीके (वामावर्त व दक्षिणावर्त समान हों): `= (n - 1)! / 2`

• **संचय (Combination — चयन / टीम बनाना, जहाँ क्रम महत्वपूर्ण नहीं है):**

`nCr = n! / [r! × (n - r)!]`

• **संचय के प्रमुख गुणधर्म:**

1. `nCr = nC(n - r)` तथा यदि `nCx = nCy` हो, तो या तो `x = y` होगा या `x + y = n` होगा।
2. **पास्कल नियम:** `nCr + nC(r - 1) = (n + 1)Cr`
3. **अनुपात सूत्र:** `nCr / nC(r - 1) = (n - r + 1) / r`
4. `n` **भिन्न वस्तुओं में से कम-से-कम एक वस्तु चुनने के तरीके:** `nC1 + nC2 + ... + nCn = 2^n - 1`

• **ज्यामितीय अनुप्रयोग (`n` बिंदुओं में से `m` बिंदु संरेखीय हों):**

• कुल सरल रेखाओं की संख्या `= nC2 - mC2 + 1`

• कुल त्रिभुजों की संख्या `= nC3 - mC3`

• `n` भुजाओं वाले बहुभुज में कुल विकर्णों (Diagonals) की संख्या `= nC2 - n = n(n - 3) / 2`

• **डी-अरेंजमेंट प्रमेय (Derangement `D_n` — कोई भी वस्तु अपने सही स्थान पर न जाए):**

`D_n = n! × [1 - 1/1! + 1/2! - 1/3! + ... + (-1)^n / n!]`

(मान याद रखें: `D_1 = 0`, `D_2 = 1`, `D_3 = 2`, `D_4 = 9`, `D_5 = 44`, `D_6 = 265`)।

3.3 द्विपद प्रमेय (Binomial Theorem) एवं लघुगणक (Logarithms)

• **द्विपद प्रसार:** `(x + a)^n = nC0 x^n + nC1 x^(n-1) a^1 + ... + nCr x^(n-r) a^r + ... + nCn a^n`

• **कुल पदों की संख्या:** `(x + a)^n` में `n + 1` पद होते हैं। बहुपद `(x1 + x2 + ... + xk)^n` के प्रसार में कुल पदों की संख्या `= (n + k - 1)C(k - 1)` होती है।

• **व्यापक पद (General Term `(r + 1)`-वाँ पद):** `T_(r+1) = nCr × x^(n - r) × a^r`

• **मध्य पद (Middle Term):**

• यदि `n` सम हो, तो केवल एक मध्य पद होगा: `(n/2 + 1)`-वाँ पद।

• यदि `n` विषम हो, तो दो मध्य पद होंगे: `((n + 1)/2)`-वाँ तथा `((n + 3)/2)`-वाँ पद।

• **द्विपद गुणांकों के गुणधर्म:**

- सभी द्विपद गुणांकों का योग: C0 + C1 + C2 + ... + Cn = 2^n
- सम तथा विषम स्थानों के द्विपद गुणांकों का योग: C0 + C2 + C4 + ... = C1 + C3 + C5 + ... = 2^(n - 1)
- वर्गों का योग: C0^2 + C1^2 + C2^2 + ... + Cn^2 = (2n)Cn = (2n)! / (n!)^2

लघुगणक (Logarithms) के 1D स्वर्णिम सूत्र (x > 0, y > 0, a > 0, a ≠ 1)

1. a^b = x ⇔ log_a(x) = b , log_a(1) = 0 , तथा log_a(a) = 1
2. **गुणन व भाग नियम:** log_a(x × y) = log_a(x) + log_a(y) तथा log_a(x / y) = log_a(x) - log_a(y)
3. **घात नियम:** log_a(x^m) = m × log_a(x) तथा log_(a^k)(x^m) = (m / k) × log_a(x)
4. **आधार परिवर्तन सूत्र (Base Change Formula):** log_b(a) = log_c(a) / log_c(b) = 1 / log_a(b)
5. **चरघातांकी-लघुगणक सर्वसमिका:** a^(log_a(x)) = x तथा a^(log_b(c)) = c^(log_b(a))

3.4 IUC सुपर-फास्ट शॉर्ट-ट्रिक्स (Chapter 3 Short-Tricks)

- **ट्रिक 1 (समांतर श्रेणी में S_n = A n^2 + B n से d और T_n निकालना):**

यदि किसी AP के n पदों का योग S_n = A n^2 + B n हो, तो उसका प्रथम पद a = A + B , सार्व अंतर d = 2A (अर्थात n^2 के गुणांक का दोगुना), तथा n -वाँ पद T_n = 2An + (B - A) होता है!

- **ट्रिक 2 ((ax^p + b / x^q)^n के प्रसार में x से स्वतंत्र पद या x^k का गुणांक):**

x^k वाले पद के लिए r का सीधा सूत्र: r = (n×p - k) / (p + q) । और x से स्वतंत्र पद (k = 0) के लिए: r = (n × p) / (p + q) ।

- **ट्रिक 3 (किसी शब्द की शब्दकोश रैंक 10 सेकंड में निकालना):**

शब्द के अक्षरों को लिखें, उनके नीचे वर्णमाला क्रम के अंक (1, 2, 3, ...) लिखें। फिर प्रत्येक अक्षर के दाईं ओर उससे छोटे अंकों की संख्या गिनें, उनके नीचे दाएँ से बाएँ 0!, 1!, 2!, 3!, ... लिखकर गुणा करें और अंत में + 1 जोड़ दें!

3.5 हल सहित उदाहरण (Solved Examples)

अभ्यास प्रश्न #23 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 3.1: यदि किसी समांतर श्रेणी के n पदों का योग 3n^2 + 5n है, तो उसका सार्व अंतर तथा 15 -वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल:

IUC शॉर्ट-ट्रिक 1 से: यहाँ A = 3, B = 5 ।

अतः सार्व अंतर d = 2A = 2 × 3 = 6 , प्रथम पद a = A + B = 3 + 5 = 8 ।

15 -वाँ पद T_15 = a + 14d = 8 + 14 × 6 = 8 + 84 = 92 ।

अभ्यास प्रश्न #24 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 3.2: शब्द MOTHER के अक्षरों से बने सभी शब्दों को शब्दकोश (Dictionary) के क्रम में व्यवस्थित करने पर MOTHER का स्थान (Rank) क्या होगा?

हल:

अक्षर: M O T H E R

वर्णमाला क्रम: E(1), H(2), M(3), O(4), R(5), T(6) ⇒ शब्द के नीचे अंक: 3, 4, 6, 2, 1, 5 ।

प्रत्येक अंक के दाईं ओर उससे छोटे अंकों की संख्या:

M(3) के दाएँ छोटे (2, 1) = 2; O(4) के दाएँ छोटे (2, 1) = 2; T(6) के दाएँ छोटे (2, 1, 5) = 3; H(2) के दाएँ छोटा (1) = 1; E(1) के दाएँ छोटा = 0; R(5) के दाएँ छोटा = 0।

अब क्रमशः 5!, 4!, 3!, 2!, 1!, 0! से गुणा करके + 1 जोड़ें:

रैंक = (2 × 5!) + (2 × 4!) + (3 × 3!) + (1 × 2!) + (0 × 1!) + (0 × 0!) + 1 = 240 + 48 + 18 + 2 + 0 + 0 + 1 = 309।

अभ्यास प्रश्न #25 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 3.3: (2x^2 - 3 / x^3)^10 के प्रसार में x से स्वतंत्र पद (Term independent of x) कौन-सा है?

हल:

IUC शॉर्ट-ट्रिक 2 से: यहाँ n = 10, p = 2, q = 3।

स्वतंत्र पद के लिए r = (n × p) / (p + q) = (10 × 2) / (2 + 3) = 20 / 5 = 4।

अतः (r + 1) = 5-वाँ पद x से स्वतंत्र होगा तथा उसका मान = 10C4 × (2)^6 × (-3)^4 = 210 × 64 × 81 = 1088640 है।

अभ्यास प्रश्न #26 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 3.4: अनंत श्रेणी 9^(1/3) × 9^(1/9) × 9^(1/27) × ... ∞ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

आधार समान होने पर घातें जुड़ जाएँगी: S = 1/3 + 1/9 + 1/27 + ... ∞ (अनंत गुणोत्तर श्रेणी जहाँ a = 1/3, r = 1/3)।

S_∞ = a / (1 - r) = (1/3) / (1 - 1/3) = (1/3) / (2/3) = 1/2।

अतः दिए गए व्यंजक का मान = 9^(1/2) = 3।

अभ्यास प्रश्न #27 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 3.5: यदि log_10(2), log_10(2^x - 1) तथा log_10(2^x + 3) समांतर श्रेणी (AP) में हों, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

समांतर श्रेणी की शर्त 2b = a + c से: 2 × log_10(2^x - 1) = log_10(2) + log_10(2^x + 3) ⇒ (2^x - 1)^2 = 2 × (2^x + 3)।

माना 2^x = y, तब (y - 1)^2 = 2y + 6 ⇒ y^2 - 4y - 5 = 0 ⇒ (y - 5)(y + 1) = 0।

चूँकि 2^x > 0, अतः 2^x = 5 ⇒ x = log_2(5)।

3.6 विगत वर्षों के प्रश्न (PYQs — हल सहित)

अभ्यास प्रश्न #28 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 1 [UPSC NDA 2024]: यदि (1 + 2x - x^2)^6 के प्रसार में सभी गुणांकों का योग S हो, तो S का मान क्या है?

(A) 64 (B) 1 (C) 0 (D) 729

हल (A): किसी भी बहुपद या द्विपद के प्रसार में सभी गुणांकों का योग निकालने के लिए सभी चरों (x, y, ...) के स्थान पर 1 रख देते हैं।

यहाँ x = 1 रखने पर: S = (1 + 2(1) - 1^2)^6 = (2)^6 = 64।

अभ्यास प्रश्न #29 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 2 [CUET PG / TGT Maths]: यदि nC10 = nC14 हो, तो 25Cn का मान क्या होगा?

(A) 24 (B) 25 (C) 1 (D) 300

हल (B): सूत्र nCx = nCy ⇒ n = x + y से n = 10 + 14 = 24। अतः 25Cn = 25C24 = 25C1 = 25।

अभ्यास प्रश्न #30 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 3 [UPSC NDA 2025]: एक समतल में 12 बिंदु हैं जिनमें से 5 बिंदु एक ही सरल रेखा में (संरेखीय) हैं। इन बिंदुओं को मिलाकर कुल कितने त्रिभुज बनाए जा सकते हैं?

(A) 220 (B) 210 (C) 211 (D) 185

हल (B): कुल त्रिभुजों की संख्या = 12C3 - 5C3 = [(12 × 11 × 10) / 6] - [(5 × 4 × 3) / 6] = 220 - 10 = 210।

अभ्यास प्रश्न #31 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 4 [Airforce X-Group 2024]: यदि दो धनात्मक संख्याओं का समांतर माध्य A = 25 और हरात्मक माध्य H = 9 हो, तो उनका गुणोत्तर माध्य G क्या होगा?

(A) 12 (B) 15 (C) 16 (D) 20

हल (B): सूत्र G^2 = A × H से: G = √(25 × 9) = 5 × 3 = 15।

अभ्यास प्रश्न #32 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 5 [UPSC NDA 2023]: 1 / log_2(N) + 1 / log_3(N) + 1 / log_4(N) + ... + 1 / log_100(N) का मान क्या है, जहाँ N = 100! है?

(A) 0 (B) 1 (C) 100 (D) 1 / 100!

हल (B): आधार परिवर्तन सूत्र 1 / log_a(N) = log_N(a) से:

व्यंजक = log_N(2) + log_N(3) + ... + log_N(100) = log_N(2 × 3 × 4 × ... × 100) = log_N(100!) = log_N(N) = 1।

अभ्यास प्रश्न #33 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 6 [PGT Maths 2024]: 4 पत्रों और 4 पता लिखे लिफाफों में सभी पत्र गलत लिफाफों में रखे जाने के कुल कितने तरीके हैं?

(A) 24 (B) 9 (C) 15 (D) 8

हल (B): यह n = 4 के डी-अरेंजमेंट (Derangement) का प्रश्न है: D_4 = 4! × (1/2! - 1/3! + 1/4!) = 24 × (1/2 - 1/6 + 1/24) = 12 - 4 + 1 = 9।

अध्याय 4: आव्यूह एवं सारणिक (Matrices & Determinants)

4.1 आव्यूह के प्रकार एवं बीजगणित (Types & Algebra of Matrices)

m पंक्तियों (Rows) और n स्तंभों (Columns) में व्यवस्थित m × n संख्याओं की आयताकार सारणी को m × n कोटि (Order) का आव्यूह कहते हैं।

- **आव्यूह गुणन की शर्त:** दो आव्यूहों A_(m×n) तथा B_(p×q) का गुणनफल AB तभी परिभाषित होता है जब पहले आव्यूह के स्तंभों की संख्या दूसरे आव्यूह की पंक्तियों की संख्या के बराबर हो (n = p), तथा परिणामी आव्यूह AB की कोटि m × q होती है। सामान्यतः AB ≠ BA (क्रमविनिमेय नियम का पालन नहीं होता)।
- **परिवर्त आव्यूह (Transpose A' या A^T):** पंक्तियों और स्तंभों को आपस में बदलने पर प्राप्त आव्यूह।
- गुणधर्म: (A')' = A , (A ± B)' = A' ± B' , (kA)' = k × A' , तथा **उत्क्रमण नियम (Reversal Law):** (AB)' = B' × A' ।
- **अनुरेख (Trace of a Square Matrix tr(A)):** मुख्य विकर्ण के सभी अवयवों का योग tr(A) = ∑ a_ii ।

विशेष वर्ग आव्यूहों की तुलनात्मक सारणी (Special Square Matrices)

आव्यूह का प्रकार (Matrix Type)	गणितीय परिभाषा (1D Condition)	मुख्य गुणधर्म एवं सारणिक मान (Key Exam Properties)
सममित आव्यूह (Symmetric)	`A' = A` (अर्थात `a_ij = a_ji`)	किसी भी वर्ग आव्यूह `A` के लिए `A + A'` तथा `A × A'` सदैव सममित होते हैं
विषम-सममित (Skew-Symmetric)	`A' = -A` (अर्थात `a_ij = -a_ji`)	मुख्य विकर्ण के सभी अवयव शून्य होते हैं (`a_ii = 0`); विषम कोटि के लिए |A| = 0
लांबिक आव्यूह (Orthogonal)	`A × A' = A' × A = I`	यहाँ `A^-1 = A'` होता है तथा इसका सारणिक मान सदैव |A| = ±1 होता है
वर्गसम आव्यूह (Idempotent)	`A^2 = A`	इसके सारणिक का मान या तो `0` होता है या `1`; इसके अभिलाक्षणिक मूल केवल `0` या `1` होते हैं
अंतर्वलनी आव्यूह (Involutory)	`A^2 = I`	यह स्वयं का व्युत्क्रम होता है (`A^-1 = A`), तथा |A| = ±1
शून्यभावी आव्यूह (Nilpotent)	`A^k = O` (`k` न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक)	इसका सारणिक मान सदैव |A| = 0 **तथा सभी अभिलाक्षणिक मूल** 0 होते हैं
हर्मिटीय आव्यूह (Hermitian)	`A^θ = (Ā)' = A`	मुख्य विकर्ण के सभी अवयव विशुद्ध वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers) होते हैं

• **सममित एवं विषम-सममित आव्यूहों के योग के रूप में वियोजन:** प्रत्येक वर्ग आव्यूह `A` को अद्वितीय रूप से एक सममित और एक विषम-सममित आव्यूह के योग के रूप में लिखा जा सकता है:

`A = (1/2)(A + A') + (1/2)(A - A')` (जहाँ पहला भाग सममित और दूसरा भाग विषम-सममित है)।

4.2 सारणिक, सहखंडज एवं व्युत्क्रम आव्यूह (Determinants, Adjoint & Inverse)

केवल वर्ग आव्यूहों का ही सारणिक (`|A|` या `det(A)`) परिभाषित होता है।

• **उपसारणिक (`M_ij`) एवं सहखंड (`C_ij`):** अवयव `a_ij` की पंक्ति और स्तंभ को हटाने पर प्राप्त सारणिक को उपसारणिक `M_ij` कहते हैं, तथा `C_ij = (-1)^(i + j) × M_ij` को सहखंड (Cofactor) कहते हैं।

• **सहखंडज आव्यूह (Adjoint `adj(A)`):** आव्यूह `A` के अवयवों के सहखंडों से बने आव्यूह का परिवर्त: `adj(A) = [C_ij]^T`।

• **व्युत्क्रम आव्यूह (Inverse Matrix `A^-1`):** `A^-1 = (1 / |A|) × adj(A)` (यह केवल तभी अस्तित्व में होता है जब `|A| ≠ 0` अर्थात `A` व्युत्क्रमणीय / Non-singular हो)।

सारणिक एवं सहखंडज के 10 अति-महत्वपूर्ण महत्वपूर्ण सूत्र (यदि `A` कोटि `n` का वर्ग आव्यूह है)

1. `A × adj(A) = adj(A) × A = |A| × I_n`
2. `|A × B| = |A| × |B|` तथा `|A^T| = |A|` तथा `|A^k| = |A|^k`
3. **अदिश गुणन का सारणिक:** `|k × A| = k^n × |A|` (परीक्षा में सर्वाधिक पूछा जाने वाला सूत्र!)
4. **व्युत्क्रम का सारणिक:** `|A^-1| = 1 / |A|` तथा `(A × B)^-1 = B^-1 × A^-1`
5. **सहखंडज का सारणिक:** `|adj(A)| = |A|^(n - 1)`
6. **दोहरे सहखंडज का सारणिक:** `|adj(adj(A))| = |A|^((n - 1)^2)` तथा `adj(adj(A)) = |A|^(n - 2) × A`
7. **अदिश गुणन का सहखंडज:** `adj(k × A) = k^(n - 1) × adj(A)`

8. **गुणनफल का सहखंडज:** adj(A × B) = adj(B) × adj(A) तथा adj(A^T) = (adj(A))^T

9. **सारणिक से त्रिभुज का क्षेत्रफल** (शीर्ष (x1, y1), (x2, y2), (x3, y3) होने पर):

Δ = (1/2) × | x1(y2 - y3) + x2(y3 - y1) + x3(y1 - y2) | (तीनों बिंदु संरेखीय होंगे यदि Δ = 0)।

4.3 रैखिक समीकरण निकाय (क्रेमर नियम) एवं अभिलाक्षणिक मूल (Eigenvalues)

तीन चरों वाले रैखिक समीकरण निकाय AX = B में गुणांकों का सारणिक Δ = |A| तथा स्तंभ प्रतिस्थापन सारणिक Δx, Δy, Δz हों, तो **क्रेमर नियम (Cramer's Rule)** से x = Δx / Δ, y = Δy / Δ, z = Δz / Δ ।

- **केस 1:** यदि Δ ≠ 0 , तो निकाय **संगत (Consistent)** है और इसका **अद्वितीय हल (Unique Solution)** होता है।
- **केस 2:** यदि Δ = 0 तथा Δx, Δy, Δz में से कम-से-कम एक अशून्य हो (अर्थात (adj A) × B ≠ O), तो निकाय **असंगत (Inconsistent)** है और इसका **कोई हल नहीं (No Solution)** होता।
- **केस 3:** यदि Δ = 0 तथा Δx = Δy = Δz = 0 (अर्थात (adj A) × B = O), तो निकाय के **अनंत हल (Infinite Solutions)** होते हैं (यदि समीकरण समानांतर असंगत समतल न हों)।
- **समघातीय समीकरण निकाय (AX = O):** यह सदैव संगत होता है! यदि |A| ≠ 0 हो तो केवल शून्य हल (x = y = z = 0 — Trivial Solution) होता है, और यदि |A| = 0 हो तो **अशून्य अनंत हल (Non-trivial Infinite Solutions)** होते हैं।

अभिलाक्षणिक मूल (Eigenvalues λ) एवं कैले-हैमिल्टन प्रमेय

समीकरण |A - λI| = 0 को अभिलाक्षणिक समीकरण कहते हैं और इसके मूलों λ1, λ2, ..., λn को अभिलाक्षणिक मूल (Eigenvalues) कहते हैं।

1. **अभिलाक्षणिक मूलों का योग = आव्यूह का अनुरेख (Trace) :** λ1 + λ2 + ... + λn = tr(A)
2. **अभिलाक्षणिक मूलों का गुणनफल = आव्यूह का सारणिक :** λ1 × λ2 × ... × λn = |A|
3. **कैले-हैमिल्टन प्रमेय:** प्रत्येक वर्ग आव्यूह अपने स्वयं के अभिलाक्षणिक समीकरण को संतुष्ट करता है।
4. यदि A के अभिलाक्षणिक मूल λ_i हों, तो A^m के मूल λ_i^m , A^-1 के मूल 1 / λ_i , तथा adj(A) के मूल |A| / λ_i होते हैं।

4.4 IUC सुपर-फास्ट शॉर्ट-ट्रिक्स (Chapter 4 Short-Tricks)

- **ट्रिक 1 (2 × 2 आव्यूह का adj(A) और A^-1 3 सेकंड में):**

यदि A = [[a, b], [c, d]] हो, तो मुख्य विकर्ण के अवयवों a, d को आपस में बदल दें और शेष विकर्ण के अवयवों b, c का केवल चिह्न बदल दें:

adj(A) = [[d, -b], [-c, a]] तथा A^-1 = [1 / (ad - bc)] × [[d, -b], [-c, a]] ।

- **ट्रिक 2 (त्रिभुजाकार या विकर्ण आव्यूह का सारणिक व Eigenvalues):**

किसी भी उपरि-त्रिभुजाकार (Upper Triangular), निम्न-त्रिभुजाकार या विकर्ण आव्यूह के मुख्य विकर्ण के अवयव ही उसके अभिलाक्षणिक मूल (Eigenvalues) होते हैं, और उनका गुणनफल ही उसका सारणिक होता है!

- **ट्रिक 3 (2 × 2 आव्यूह का अभिलाक्षणिक समीकरण सीधे लिखना):**

λ^2 - (tr(A)) × λ + |A| = 0 तथा 3 × 3 आव्यूह के लिए: λ^3 - (tr(A)) × λ^2 + (C11 + C22 + C33) × λ - |A| = 0 ।

4.5 हल सहित उदाहरण (Solved Examples)

अभ्यास प्रश्न #34 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 4.1: यदि A एक 3×3 कोटि का वर्ग आव्यूह है और $|A| = 5$ है, तो $|2 \times \text{adj}(3A)|$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

सूत्र $|k \times M| = k^n \times |M|$ तथा $|\text{adj}(M)| = |M|^{(n-1)}$ (यहाँ $n = 3$) का प्रयोग करने पर:

$|2 \times \text{adj}(3A)| = 2^3 \times |\text{adj}(3A)| = 8 \times |3A|^{(3-1)} = 8 \times (|3A|)^2$।

पुनः $|3A| = 3^3 \times |A| = 27 \times 5 = 135$।

अतः अभीष्ट मान $= 8 \times (135)^2 = 8 \times 18225 = 145800$।

अभ्यास प्रश्न #35 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 4.2: आव्यूह $A = [[5, 4], [1, 2]]$ के अभिलाक्षणिक मूल (Eigenvalues) ज्ञात कीजिए।

हल:

IUC शॉर्ट-ट्रिक 3 से: यहाँ $\text{tr}(A) = 5 + 2 = 7$ तथा $|A| = (5 \times 2) - (4 \times 1) = 6$।

अभिलाक्षणिक समीकरण: $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow (\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 6$।

अभ्यास प्रश्न #36 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 4.3: यदि समघातीय समीकरण निकाय $x + ky + 3z = 0$, $3x + ky - 2z = 0$, $2x + 4y - 3z = 0$ का एक अशून्य हल (Non-trivial solution) हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

अशून्य हल के लिए गुणांक सारणिक $\Delta = 0$ होना चाहिए:

$1(-3k + 8) - k(-9 + 4) + 3(12 - 2k) = 0 \Rightarrow -3k + 8 + 5k + 36 - 6k = 0 \Rightarrow -4k + 44 = 0 \Rightarrow k = 11$।

अभ्यास प्रश्न #37 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 4.4: यदि A एक 3×3 कोटि का विषम-सममित आव्यूह (Skew-Symmetric Matrix) है, तो $|A|$ का मान क्या होगा?

हल:

चूँकि $A' = -A$ तथा $n = 3$ (विषम कोटि): $|A'| = |-A| \Rightarrow |A| = (-1)^3 \times |A| = -|A| \Rightarrow 2|A| = 0 \Rightarrow |A| = 0$।

अभ्यास प्रश्न #38 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 4.5: यदि $A = [[\cos\theta, -\sin\theta], [\sin\theta, \cos\theta]]$ हो, तो A^{12} का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

यह घूर्णन आव्यूह (Rotation Matrix $R(\theta)$) है जिसका मानक गुणधर्म है: $[R(\theta)]^n = R(n\theta)$।

अतः $A^{12} = [[\cos(12\theta), -\sin(12\theta)], [\sin(12\theta), \cos(12\theta)]]$।

4.6 विगत वर्षों के प्रश्न (PYQs — हल सहित)

अभ्यास प्रश्न #39 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 1 [UPSC NDA 2024]: यदि A कोटि 3 का एक वर्ग आव्यूह है तथा $|adj(adj\ A)| = 81$ है, तो $|A|$ का मान क्या हो सकता है?

(A) ± 9 (B) ± 3 (C) 27 (D) $\pm\sqrt{3}$

हल (B): सूत्र $|adj(adj\ A)| = |A|^{((n-1)^2)}$ से, $n = 3$ रखने पर $|A|^{(2^2)} = |A|^4 = 81 = 3^4 \Rightarrow |A| = \pm 3$।

अभ्यास प्रश्न #40 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 2 [CUET UG 2024]: यदि A एक 3×3 कोटि का व्युत्क्रमणीय आव्यूह है और $|A| = -4$ है, तो $\det(-2 \times A^{-1})$ का मान क्या होगा?

(A) 2 (B) -2 (C) 8 (D) $1/2$

हल (A): $|-2 \times A^{-1}| = (-2)^3 \times |A^{-1}| = -8 \times (1 / |A|) = -8 / (-4) = 2$।

अभ्यास प्रश्न #41 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 3 [UPSC NDA 2025]: यदि आव्यूह $A = [[1, 2, 3], [0, 4, 5], [0, 0, 6]]$ है, तो A^{-1} के सभी अभिलाक्षणिक मूलों (Eigenvalues) का योग क्या होगा?

(A) 11 (B) $11/12$ (C) $37/24$ (D) $1/24$

हल (C): A एक उपरि-त्रिभुजाकार आव्यूह है, इसलिए A के अभिलाक्षणिक मूल विकर्ण अवयव $1, 4, 6$ हैं। अतः A^{-1} के अभिलाक्षणिक मूल $1/1, 1/4, 1/6$ होंगे। इनका योग $= 1 + 1/4 + 1/6 = (24 + 6 + 4) / 24 = 34 / 24 = 17 / 12$। (यदि विकर्ण अवयव $1, 2, 6$ हों तो $1 + 1/2 + 1/6 = 5/3$, और यहाँ $1, 4, 6$ के लिए सटीक योग $17/12$ है)।

अभ्यास प्रश्न #42 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 4 [TGT/PGT Maths 2023]: यदि ω इकाई का एक काल्पनिक घनमूल है, तो सारणिक $|(1, \omega, \omega^2), (\omega, \omega^2, 1), (\omega^2, 1, \omega)|$ का मान क्या है?

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) -3

हल (A): संक्रिया $C1 \to C1 + C2 + C3$ लगाने पर प्रथम स्तंभ का प्रत्येक अवयव $1 + \omega + \omega^2 = 0$ हो जाएगा। अतः सारणिक का मान $= 0$।

अभ्यास प्रश्न #43 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 5 [Airforce X-Group 2024]: यदि $A = [[2, -1], [3, 4]]$ हो, तो $A \times adj(A)$ का मान क्या होगा?

(A) $11 \times I_2$ (B) $5 \times I_2$ (C) I_2 (D) O

हल (A): सूत्र $A \times adj(A) = |A| \times I$ से: यहाँ $|A| = (2 \times 4) - (-1 \times 3) = 8 + 3 = 11$। अतः $A \times adj(A) = 11 \times I_2$।

अभ्यास प्रश्न #44 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 6 [UPSC NDA 2023]: समीकरण निकाय $x + y + z = 6$, $x + 2y + 3z = 10$, $x + 2y + \lambda z = \mu$ के अनंत हल (Infinite Solutions) होने के लिए (λ, μ) का मान क्या होना चाहिए?

(A) $(3, 10)$ (B) $(3, 12)$ (C) $(2, 10)$ (D) $(4, 10)$

हल (A): दूसरे और तीसरे समीकरण की तुलना करने पर, अनंत हल के लिए दोनों समीकरण समरूप होने चाहिए, अतः $\lambda = 3$ तथा $\mu = 10$।

अध्याय 5: त्रिकोणमितीय फलन, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन एवं त्रिभुज के गुण

5.1 त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ, संयुक्त कोण एवं रूपांतरण सूत्र

• **कोण मापन संबंध:** 180° = π रेडियन (1 रेडियन ≈ 57° 16' 22'') तथा चाप-त्रिज्या संबंध θ (रेडियन में) = l / r ।

• **मूल सर्वसमिकाएँ:**

1. sin^2(θ) + cos^2(θ) = 1
2. sec^2(θ) - tan^2(θ) = 1 ⇒ (sec θ + tan θ) = 1 / (sec θ - tan θ)
3. cosec^2(θ) - cot^2(θ) = 1 ⇒ (cosec θ + cot θ) = 1 / (cosec θ - cot θ)

संयुक्त कोण, रूपांतरण एवं अपवर्त्य कोणों के 1D मानक सूत्र

1. sin(A ± B) = sin A cos B ± cos A sin B तथा cos(A ± B) = cos A cos B ∓ sin A sin B
2. tan(A ± B) = (tan A ± tan B) / (1 ∓ tan A tan B) तथा tan(45° ± θ) = (1 ± tan θ) / (1 ∓ tan θ)
3. **महत्वपूर्ण गुणनफल:** sin(A + B) × sin(A - B) = sin^2(A) - sin^2(B) = cos^2(B) - cos^2(A)
4. cos(A + B) × cos(A - B) = cos^2(A) - sin^2(B) = cos^2(B) - sin^2(A)
5. C-D **रूपांतरण सूत्र:**

• sin C + sin D = 2 sin((C + D)/2) cos((C - D)/2)

• sin C - sin D = 2 cos((C + D)/2) sin((C - D)/2)

• cos C + cos D = 2 cos((C + D)/2) cos((C - D)/2)

• cos C - cos D = -2 sin((C + D)/2) sin((C - D)/2)

6. **द्विगुण कोण (2θ) सूत्र:**

• sin(2θ) = 2 sin θ cos θ = (2 tan θ) / (1 + tan^2(θ))

• cos(2θ) = cos^2(θ) - sin^2(θ) = 2 cos^2(θ) - 1 = 1 - 2 sin^2(θ) = (1 - tan^2(θ)) / (1 + tan^2(θ))

• **स्वर्णिम अर्ध-कोण सूत्र (कलन में सर्वाधिक उपयोगी):** 1 + cos(2θ) = 2 cos^2(θ) तथा 1 - cos(2θ) = 2 sin^2(θ)

7. **त्रिगुण कोण (3θ) सूत्र:**

• sin(3θ) = 3 sin θ - 4 sin^3(θ)

• cos(3θ) = 4 cos^3(θ) - 3 cos θ

• tan(3θ) = (3 tan θ - tan^3(θ)) / (1 - 3 tan^2(θ))

8. **विशेष कोणों के मान (याद रखने योग्य):**

• sin 15° = cos 75° = (√3 - 1) / (2√2) तथा cos 15° = sin 75° = (√3 + 1) / (2√2)

• tan 15° = cot 75° = 2 - √3 तथा tan 75° = cot 15° = 2 + √3

• sin 18° = cos 72° = (√5 - 1) / 4 तथा cos 36° = sin 54° = (√5 + 1) / 4

• tan(22.5°) = √2 - 1 तथा cot(22.5°) = √2 + 1

5.2 अधिकतम व न्यूनतम मान एवं त्रिकोणमितीय समीकरण

1. **प्रकार 1 (** $a\sin\theta \pm b\cos\theta$ **):** इसका न्यूनतम मान $= -\sqrt{a^2 + b^2}$ तथा अधिकतम मान $= +\sqrt{a^2 + b^2}$ होता है।
2. **प्रकार 2 (** $a\sin^2\theta + b\cos^2\theta$ **):** इसका न्यूनतम मान $= \min(a, b)$ तथा अधिकतम मान $= \max(a, b)$ होता है।
3. **प्रकार 3 (** $a^2\tan^2\theta + b^2\cot^2\theta$ **):** AM-GM असमिका से इसका न्यूनतम मान $= 2ab$ होता है।

• इसी प्रकार $a^2\sec^2\theta + b^2\operatorname{cosec}^2\theta$ का न्यूनतम मान $= (a + b)^2$ होता है।

4. **त्रिकोणमितीय समीकरणों के व्यापक हल (General Solutions,** $n \in Z$ **):**

• $\sin\theta = \sin\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n \times \alpha$

• $\cos\theta = \cos\alpha \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \alpha$

• $\tan\theta = \tan\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + \alpha$

• $\sin^2\theta = \sin^2\alpha$ या $\cos^2\theta = \cos^2\alpha$ या $\tan^2\theta = \tan^2\alpha \Rightarrow \theta = n\pi \pm \alpha$

5.3 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन (Inverse Trigonometric Functions - ITF)

ITF की मुख्य मान शाखा (Principal Value Branch) एवं प्रांत की तुलनात्मक सारणी

प्रतिलोम फलन	प्रांत (Domain)	मुख्य मान परिसर (Principal Range)	ऋणात्मक कोण गुणधर्म	पूरक कोण सर्वसमिका
$y = \sin^{-1}x$	$[-1, 1]$	$[-\pi/2, \pi/2]$	$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$	$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \pi/2$
$y = \cos^{-1}x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$	$\cos^{-1}x = \pi/2 - \sin^{-1}x$
$y = \tan^{-1}x$	R $(-\infty, \infty)$	$(-\pi/2, \pi/2)$	$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$	$\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \pi/2$
$y = \cot^{-1}x$	R $(-\infty, \infty)$	$(0, \pi)$	$\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1}x$	$\cot^{-1}x = \pi/2 - \tan^{-1}x$
$y = \sec^{-1}x$	$R - (-1, 1)$	$[0, \pi] - \{\pi/2\}$	$\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}x$	$\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x = \pi/2$
$y = \operatorname{cosec}^{-1}x$	$R - (-1, 1)$	$[-\pi/2, \pi/2] - \{0\}$	$\operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1}x$	$\operatorname{cosec}^{-1}x = \pi/2 - \sec^{-1}x$

ITF के प्रमुख 1D योग एवं रूपांतरण सूत्र

1. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)$ (जब $xy < 1$), तथा $\pi + \tan^{-1}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)$ (जब $x > 0, y > 0, xy > 1$)
2. $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x - y}{1 + xy}\right)$ (जब $xy > -1$)
3. $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1 - x^2}\right)$
4. $\sin^{-1}x \pm \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1 - y^2} \pm y\sqrt{1 - x^2}\right]$
5. $\cos^{-1}x \pm \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left[xy \mp \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}\right]$

5.4 त्रिभुज के गुण (Properties of Triangles — ΔABC में भुजाएँ a, b, c एवं अर्ध-परिमाप $s = (a+b+c)/2$)

1. **ज्या नियम (Sine Rule):** $a / \sin A = b / \sin B = c / \sin C = 2R$ (जहाँ R परिवृत्त की त्रिज्या है)।
2. **कोज्या नियम (Cosine Rule):** $\cos A = (b^2 + c^2 - a^2) / (2bc)$, $\cos B = (c^2 + a^2 - b^2) / (2ca)$, $\cos C = (a^2 + b^2 - c^2) / (2ab)$
3. **प्रक्षेप सूत्र (Projection Formula):** $a = b \cos C + c \cos B$, $b = c \cos A + a \cos C$, $c = a \cos B + b \cos A$
4. **नेपियर की अनुरूपता (Napier's Analogy):** $\tan((B - C)/2) = [(b - c) / (b + c)] \times \cot(A/2)$
5. **अर्ध-कोण सूत्र:** $\sin(A/2) = \sqrt{[((s - b)(s - c)) / (bc)]}$, $\cos(A/2) = \sqrt{[(s(s - a)) / (bc)]}$, $\tan(A/2) = \sqrt{[((s - b)(s - c)) / (s(s - a))]} = \Delta / [s(s - a)]$
6. **त्रिभुज का क्षेत्रफल (Δ):** $\Delta = (1/2)\, bc \sin A = \sqrt{[s(s - a)(s - b)(s - c)]} = (abc) / (4R) = r \times s$
7. **वृत्तों की त्रिज्याएँ:** परिवृत्त त्रिज्या $R = abc / (4\Delta)$, अंत:वृत्त त्रिज्या $r = \Delta / s$, तथा बाह्यवृत्त त्रिज्याएँ $r1 = \Delta / (s - a), r2 = \Delta / (s - b), r3 = \Delta / (s - c)$।

• **समबाहु त्रिभुज में स्वर्णिम अनुपात:** $r : R : r1 = 1 : 2 : 3$ तथा क्षेत्रफलों का अनुपात $= 1 : 4 : 9$।

5.5 IUC सुपर-फास्ट शॉर्ट-ट्रिक्स (Chapter 5 Short-Tricks)

• **ट्रिक 1 ($60° - \theta, \theta, 60° + \theta$ गुणनफल ट्रिक):**

• $\sin\theta \times \sin(60° - \theta) \times \sin(60° + \theta) = (1/4)\sin(3\theta)$

• $\cos\theta \times \cos(60° - \theta) \times \cos(60° + \theta) = (1/4)\cos(3\theta)$

• $\tan\theta \times \tan(60° - \theta) \times \tan(60° + \theta) = \tan(3\theta)$

• **ट्रिक 2 ($A + B = 45°$ या $225°$ होने पर):**

यदि $A + B = 45°$ हो, तो सदैव $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$ तथा $(\cot A - 1)(\cot B - 1) = 2$ होता है!

• **ट्रिक 3 ($\cos\theta \times \cos 2\theta \times \cos 4\theta \ldots \cos(2^{n-1}\theta)$ गुणनफल सूत्र):**

इसका मान सदैव $\sin(2^n\theta) / [2^n \times \sin\theta]$ होता है।

5.6 हल सहित उदाहरण (Solved Examples)

अभ्यास प्रश्न #45 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 5.1: $\sin 20° \times \sin 40° \times \sin 60° \times \sin 80°$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

IUC शॉर्ट-ट्रिक 1 से ($\theta = 20°$ रखने पर): $\sin 20° \times \sin 40° \times \sin 80° = (1/4)\sin(3 \times 20°) = (1/4)\sin 60° = \sqrt{3} / 8$।

इसमें $\sin 60° = \sqrt{3} / 2$ से गुणा करने पर अभीष्ट मान $= (\sqrt{3} / 8) \times (\sqrt{3} / 2) = 3 / 16$।

अभ्यास प्रश्न #46 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 5.2: व्यंजक $5 \sin\theta + 12 \cos\theta + 15$ का अधिकतम तथा न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

हल:

यहाँ $a = 5, b = 12 \Rightarrow \sqrt{(a^2 + b^2)} = \sqrt{(25 + 144)} = 13$।

अतः अधिकतम मान $= +13 + 15 = 28$ तथा न्यूनतम मान $= -13 + 15 = 2$।

अभ्यास प्रश्न #47 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 5.3: $(1 + \tan 1°)(1 + \tan 2°)(1 + \tan 3°)...(1 + \tan 44°)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

IUC शॉर्ट-ट्रिक 2 से: जब $A + B = 45°$ हो तो $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$।

यहाँ $(1°, 44°), (2°, 43°), ..., (22°, 23°)$ के कुल 22 युग्म बनेंगे और प्रत्येक युग्म का गुणनफल 2 होगा। अतः उत्तर $= 2^{22}$।

अभ्यास प्रश्न #48 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 5.4: यदि $\sin^{-1}(x) + \sin^{-1}(y) + \sin^{-1}(z) = 3\pi / 2$ हो, तो $x^{100} + y^{100} + z^{100} - 9 / (x^{101} + y^{101} + z^{101})$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

चूँकि $\sin^{-1}$ का अधिकतम मुख्य मान $\pi/2$ होता है, अतः तीन पदों का योग $3\pi/2$ केवल तभी संभव है जब प्रत्येक पद $\pi/2$ हो, अर्थात $x = y = z = 1$।

मान रखने पर: $1 + 1 + 1 - 9 / (1 + 1 + 1) = 3 - 3 = 0$।

अभ्यास प्रश्न #49 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 5.5: किसी त्रिभुज ABC में यदि $a = 13, b = 14, c = 15$ हो, तो अंतःवृत्त की त्रिज्या r तथा परिवृत्त की त्रिज्या R ज्ञात कीजिए।

हल:

यहाँ $s = (13 + 14 + 15) / 2 = 21$।

हीरोन के सूत्र से क्षेत्रफल $\Delta = \sqrt{[21 \times (21 - 13) \times (21 - 14) \times (21 - 15)]} = \sqrt{[21 \times 8 \times 7 \times 6]} = 84$।

अतः $r = \Delta / s = 84 / 21 = 4$ तथा $R = (abc) / (4\Delta) = (13 \times 14 \times 15) / (4 \times 84) = 65 / 8 = 8.125$।

5.7 विगत वर्षों के प्रश्न (PYQs — हल सहित)

अभ्यास प्रश्न #50 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 1 [UPSC NDA 2024]: $\tan^{-1}(1/2) + \tan^{-1}(1/3)$ का मुख्य मान क्या है?

(A) $\pi / 6$ (B) $\pi / 4$ (C) $\pi / 3$ (D) $\pi / 2$

हल (B): सूत्र से $\tan^{-1}[(1/2 + 1/3) / (1 - 1/6)] = \tan^{-1}[(5/6) / (5/6)] = \tan^{-1}(1) = \pi / 4$।

अभ्यास प्रश्न #51 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 2 [UPSC NDA 2025]: व्यंजक $9 \tan^2(\theta) + 4 \cot^2(\theta)$ का न्यूनतम मान क्या है?

(A) 6 (B) 12 (C) 13 (D) 25

हल (B): सूत्र $2\sqrt{(a^2 \times b^2)} = 2ab$ से: न्यूनतम मान $= 2 \times \sqrt{(9 \times 4)} = 2 \times 6 = 12$।

अभ्यास प्रश्न #52 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 3 [CUET UG 2024]: `cos^-1(cos(7π / 6))` का मुख्य मान क्या है?

(A) `7π / 6` (B) `5π / 6` (C) `π / 6` (D) `-π / 6`

हल (B): चूँकि `7π/6 ∉ [0, π]`, अतः `cos(7π/6) = cos(2π - 5π/6) = cos(5π/6)`। अब `5π/6 ∈ [0, π]`, इसलिए मुख्य मान `= 5π / 6`।

अभ्यास प्रश्न #53 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 4 [Airforce X-Group 2024]: किसी त्रिभुज `ABC` में यदि `∠A = 60°, a = 6√3` तथा `b = 6` हो, तो `∠B` का मान क्या होगा?

(A) `45°` (B) `30°` (C) `90°` (D) `75°`

हल (B): ज्या नियम `a / sin A = b / sin B` से: `(6√3) / sin 60° = 6 / sin B ⇒ (6√3) / (√3 / 2) = 6 / sin B ⇒ 12 = 6 / sin B ⇒ sin B = 1/2 ⇒ ∠B = 30°`।

अभ्यास प्रश्न #54 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 5 [TGT Maths 2023]: `cos 20° × cos 40° × cos 80°` का मान किसके बराबर है?

(A) `1 / 2` (B) `1 / 4` (C) `1 / 8` (D) `√3 / 8`

हल (C): IUC शॉर्ट-ट्रिक 1 या 3 से: `(1/4) cos(3 × 20°) = (1/4) cos 60° = (1/4) × (1/2) = 1 / 8`।

अभ्यास प्रश्न #55 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 6 [UPSC NDA 2023]: एक मीनार के पाद से `a` तथा `b` दूरी पर स्थित दो बिंदुओं से मीनार के शिखर के उन्नयन कोण एक-दूसरे के पूरक (Complementary, अर्थात `θ` तथा `90° - θ`) हैं। मीनार की ऊँचाई `h` क्या होगी?

(A) `(a + b) / 2` (B) `√(a × b)` (C) `(2ab) / (a + b)` (D) `√(a^2 + b^2)`

हल (B): प्रथम बिंदु से `tan θ = h / a` तथा दूसरे से `tan(90° - θ) = cot θ = h / b`। दोनों को गुणा करने पर `tan θ × cot θ = (h / a) × (h / b) ⇒ 1 = h^2 / (ab) ⇒ h = √(a × b)`।

अध्याय 6: द्वि-विमीय निर्देशांक ज्यामिति एवं शांकव परिच्छेद (2D Coordinate Geometry & Conic Sections)

6.1 बिंदु, दूरी, विभाजन एवं त्रिभुज के केंद्र (Points, Distance, Section & Centres of Triangle)

1. **दो बिंदुओं `A(x1, y1)` तथा `B(x2, y2)` के बीच की दूरी:** `AB = √[(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2]`
2. **विभाजन सूत्र (Section Formula — अनुपात `m : n`):**

- अंत: विभाजन बिंदु: `P = ( (mx2 + nx1)/(m + n), (my2 + ny1)/(m + n) )`
- बाह्य विभाजन बिंदु: `Q = ( (mx2 - nx1)/(m - n), (my2 - ny1)/(m - n) )`
- मध्य-बिंदु सूत्र (`1 : 1`): `M = ( (x1 + x2)/2, (y1 + y2)/2 )`

त्रिभुज के चार प्रमुख केंद्रों की तुलनात्मक सारणी (शीर्ष A(x1,y1), B(x2,y2), C(x3,y3) एवं भुजाएँ a, b, c)

केंद्र का नाम (Centre of Triangle)	ज्यामितीय परिभाषा (Intersection of)	निर्देशांक सूत्र एवं विशेष गुणधर्म (1D Coordinates & Properties)
केंद्रक (Centroid G)	तीनों माध्यिकाओं (Medians) का प्रतिच्छेदन बिंदु	G = ((x1 + x2 + x3)/3, (y1 + y2 + y3)/3); माध्यिका को 2 : 1 में बाँटता है
अंतःकेंद्र (Incentre I)	तीनों आंतरिक कोण समद्विभाजकों का संगमन बिंदु	I = ((ax1 + bx2 + cx3)/(a + b + c), (ay1 + by2 + cy3)/(a + b + c))
परिकेंद्र (Circumcentre O)	भुजाओं के लंब समद्विभाजकों का प्रतिच्छेदन बिंदु	समकोण त्रिभुज में **कर्ण का मध्य-बिंदु** ही परिकेंद्र O होता है
लंबकेंद्र (Orthocentre H)	तीनों शीर्षलंबों (Altitudes) का प्रतिच्छेदन बिंदु	समकोण त्रिभुज में **समकोण बनाने वाला शीर्ष** ही लंबकेंद्र H होता है

• **ऑयलर रेखा (Euler Line) का स्वर्णिम नियम:** किसी भी विषमबाहु या समद्विबाहु त्रिभुज में लंबकेंद्र (H), केंद्रक (G) तथा परिकेंद्र (O) सदैव सरेखीय होते हैं, और केंद्रक G, रेखाखंड HO को सदैव HG : GO = 2 : 1 के अनुपात में अंतःविभाजित करता है! (समबाहु त्रिभुज में G, I, O, H चारों एक ही बिंदु पर संपाती होते हैं)।

6.2 सरल रेखा (Straight Line) के मानक समीकरण एवं गुणधर्म

1. **प्रवणता / ढाल (Slope m):** m = tan θ = (y2 - y1) / (x2 - x1)। व्यापक समीकरण ax + by + c = 0 की प्रवणता m = -a / b।

2. **सरल रेखा के 5 मानक रूप:**

• ढाल-अंतःखंड रूप: y = mx + c

• बिंदु-ढाल रूप: y - y1 = m(x - x1)

• दो-बिंदु रूप: y - y1 = [(y2 - y1) / (x2 - x1)] × (x - x1)

• अंतःखंड रूप (Intercept Form): x / a + y / b = 1 (अक्षों के बीच कटे रेखाखंड की लंबाई = √(a^2 + b^2) तथा अक्षों के साथ बने त्रिभुज का क्षेत्रफल = (1/2) × |ab|)।

• अभिलंब रूप (Normal Form): x cos α + y sin α = p (जहाँ p मूलबिंदु से रेखा पर डाले गए लंब की लंबाई है)।

3. **दो रेखाओं के बीच का कोण θ:** tan θ = |(m1 - m2) / (1 + m1 × m2)|

• समानांतर होने की शर्त: m1 = m2 (अर्थात a1 / a2 = b1 / b2)

• लंबवत होने की शर्त: m1 × m2 = -1 (अर्थात a1 × a2 + b1 × b2 = 0)

4. **बिंदु (x1, y1) से रेखा ax + by + c = 0 की लंबवत दूरी:** d = |ax1 + by1 + c| / √(a^2 + b^2)

5. **दो समानांतर रेखाओं ax + by + c1 = 0 व ax + by + c2 = 0 के बीच की दूरी:** d = |c1 - c2| / √(a^2 + b^2)

6. **लंब के पाद (Foot of Perpendicular (h, k)) एवं प्रतिबिंब (Image (x', y')) का सीधा सूत्र:**

• लंब का पाद: (h - x1) / a = (k - y1) / b = -(ax1 + by1 + c) / (a^2 + b^2)

• दर्पण प्रतिबिंब: (x' - x1) / a = (y' - y1) / b = -2(ax1 + by1 + c) / (a^2 + b^2)

6.3 वृत्त (Circle) के समीकरण एवं स्पर्श रेखा

1. **केंद्र (h, k) तथा त्रिज्या r वाले वृत्त का समीकरण:** (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2

2. **वृत्त का व्यापक समीकरण:** `x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0`

• इसका केंद्र `C = (-g, -f) = (-x का गुणांक / 2, -y का गुणांक / 2)`

• इसकी त्रिज्या `r = √(g^2 + f^2 - c)` (वास्तविक वृत्त के लिए `g^2 + f^2 - c > 0`)।

3. **व्यास रूप (Diameter Form):** व्यास के सिरें `(x1, y1)` व `(x2, y2)` वाला वृत्त: `(x - x1)(x - x2) + (y - y1)(y - y2) = 0`

4. **अक्षों से कटे अंतःखंड:** `X`-अक्ष पर अंतःखंड `= 2√(g^2 - c)` तथा `Y`-अक्ष पर अंतःखंड `= 2√(f^2 - c)`।

5. **बिंदु `(x1, y1)` पर स्पर्श रेखा का समीकरण (`T = 0`):** `x×x1 + y×y1 + g(x + x1) + f(y + y1) + c = 0`

6. **बाह्य बिंदु `(x1, y1)` से खींची गई स्पर्श रेखा की लंबाई:** `L = √S1 = √(x1^2 + y1^2 + 2gx1 + 2fy1 + c)`

7. **दो वृत्तों के लांबिक प्रतिच्छेदन (Orthogonal Intersection, कोण `90°`) की शर्त:** `2g1×g2 + 2f1×f2 = c1 + c2`

6.4 शांकव परिच्छेद (Conic Sections — परवलय, दीर्घवृत्त एवं अतिपरवलय)

किसी स्थिर बिंदु (नाभि / Focus `S`) से दूरी तथा किसी स्थिर सरल रेखा (नियता / Directrix `ZM`) से लंबवत दूरी का अनुपात अचर रहने वाले बिंदु का बिंदुपथ शांकव कहलाता है। इस अनुपात को **उत्केंद्रता (Eccentricity `e = SP / PM`)** कहते हैं:

• वृत्त के लिए `e = 0`; परवलय (Parabola) के लिए `e = 1`; दीर्घवृत्त (Ellipse) के लिए `0 < e < 1`; अतिपरवलय (Hyperbola) के लिए `e > 1`; तथा समकोणीय अतिपरवलय (Rectangular Hyperbola `xy = c^2`) के लिए `e = √2`।

परवलय, दीर्घवृत्त एवं अतिपरवलय की मास्टर तुलनात्मक सारणी (1D Formulas)

ज्यामितीय प्राचल (Parameter)	मानक परवलय (Parabola)	मानक दीर्घवृत्त (Ellipse `a > b`)	मानक अतिपरवलय (Hyperbola)
मानक समीकरण	`y^2 = 4ax`	`x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1`	`x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1`
उत्केंद्रता (`e`) सूत्र	`e = 1`	`e = √[1 - (b^2 / a^2)]` (`b^2 = a^2(1 - e^2)`)	`e = √[1 + (b^2 / a^2)]` (`b^2 = a^2(e^2 - 1)`)
शीर्ष (Vertices)	`(0, 0)`	`(±a, 0)`	`(±a, 0)`
नाभियाँ (Foci)	`(a, 0)`	`(±ae, 0)` (नाभियों के बीच दूरी `= 2ae`)	`(±ae, 0)` (नाभियों के बीच दूरी `= 2ae`)
नियता का समीकरण (Directrix)	`x = -a` (अर्थात `x + a = 0`)	`x = ±(a / e)` (दूरी `= 2a / e`)	`x = ±(a / e)` (दूरी `= 2a / e`)
अक्षों की लंबाई	मुख्य अक्ष `Y = 0`	दीर्घ अक्ष `= 2a`, लघु अक्ष `= 2b`	अनुप्रस्थ अक्ष `= 2a`, संयुग्मी अक्ष `= 2b`
नाभिलंब जीवा की लंबाई (LR)	`4a`	`(2b^2) / a`	`(2b^2) / a`
प्राचलिक निर्देशांक (Parametric)	`(at^2, 2at)`	`(a cos θ, b sin θ)`	`(a sec θ, b tan θ)`
ढाल `m` वाली स्पर्श रेखा	`y = mx + a / m`	`y = mx ± √(a^2 m^2 + b^2)`	`y = mx ± √(a^2 m^2 - b^2)`
नाभीय दूरियों का योग / अंतर	`SP = PM = x + a`	`SP + S'P = 2a` (अचर योग)	`\`	SP - S'P\	= 2a` (अचर अंतर)

6.5 IUC सुपर-फास्ट शॉर्ट-ट्रिक्स (Chapter 6 Short-Tricks)

- **ट्रिक 1 (समचतुर्भुज $|x|/a + |y|/b = 1$ या $|ax| + |by| = c$ का क्षेत्रफल):**

समीकरण $a|x| + b|y| = c$ द्वारा घिरे समचतुर्भुज का क्षेत्रफल सदैव $= (2 \times c^2) / |a \times b|$ वर्ग इकाई होता है!

- **ट्रिक 2 (परवलय व रेखा के क्षेत्रफल तथा नाभिलंब के शॉर्टकट):**
- परवलय $y^2 = 4ax$ तथा उसके नाभिलंब (Latus Rectum) से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $= (8/3)\, a^2$।
- दो परवलयों $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4by$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $= (16/3)\, a \times b$।
- दीर्घवृत्त $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$ का संपूर्ण क्षेत्रफल $= \pi \times a \times b$।

- **ट्रिक 3 (संयुग्मी अतिपरवलय की उत्केंद्रता संबंध):**

यदि किसी अतिपरवलय और उसके संयुग्मी अतिपरवलय (Conjugate Hyperbola) की उत्केंद्रताएँ $e1$ और $e2$ हों, तो सदैव $1 / e1^2 + 1 / e2^2 = 1$ होता है!

6.6 हल सहित उदाहरण (Solved Examples)

अभ्यास प्रश्न #56 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 6.1: यदि किसी त्रिभुज का परिकेंद्र $(2, 3)$ और लंबकेंद्र $(5, 9)$ हो, तो उसका केंद्रक (Centroid G) ज्ञात कीजिए।

हल:

ऑयलर रेखा नियम से केंद्रक G, लंबकेंद्र $H(5, 9)$ और परिकेंद्र $O(2, 3)$ को $2 : 1$ के अनुपात में अंत:विभाजित करता है:

$G = ((2\times2 + 1\times5)/(2 + 1), (2\times3 + 1\times9)/(2 + 1)) = (9/3, 15/3) = (3, 5)$।

अभ्यास प्रश्न #57 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 6.2: बिंदु $(1, 2)$ का सरल रेखा $x - 3y + 4 = 0$ में दर्पण प्रतिबिंब (Mirror Image) ज्ञात कीजिए।

हल:

प्रतिबिंब सूत्र से: $(x' - 1) / 1 = (y' - 2) / (-3) = -2 \times [1 - 3(2) + 4] / (1^2 + (-3)^2) = -2 \times (-1) / 10 = 1/5$।

अत: $x' = 1 + 1/5 = 6/5$ तथा $y' = 2 - 3/5 = 7/5$। प्रतिबिंब बिंदु $= (6/5, 7/5)$।

अभ्यास प्रश्न #58 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 6.3: परवलय $y^2 - 8y - 12x + 40 = 0$ का शीर्ष, नाभि और नाभिलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल:

पूर्ण वर्ग बनाने पर: $(y - 4)^2 - 16 - 12x + 40 = 0 \Rightarrow (y - 4)^2 = 12(x - 2)$।

मानक रूप $Y^2 = 4aX$ से तुलना करने पर $4a = 12 \Rightarrow a = 3$, नाभिलंब की लंबाई $= 12$।

शीर्ष $(X = 0, Y = 0) \Rightarrow (x, y) = (2, 4)$ तथा नाभि $(X = a, Y = 0) \Rightarrow (2 + 3, 4) = (5, 4)$।

अभ्यास प्रश्न #59 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 6.4: दीर्घवृत्त $9x^2 + 25y^2 = 225$ की उत्केंद्रता (e), नाभियाँ तथा नाभिलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल:

225 से भाग देने पर: x^2 / 25 + y^2 / 9 = 1 ⇒ a = 5, b = 3।

उत्केंद्रता e = √(1 - b^2 / a^2) = √(1 - 9/25) = 4/5।

नाभियाँ = (±ae, 0) = (±4, 0) तथा नाभिलंब की लंबाई = (2b^2) / a = (2 × 9) / 5 = 18/5।

अभ्यास प्रश्न #60 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 6.5: दो समानांतर रेखाओं 3x + 4y - 7 = 0 तथा 6x + 8y + 16 = 0 के बीच की लंबवत दूरी ज्ञात कीजिए।

हल:

प्रथम समीकरण को 2 से गुणा कर गुणांक समान करने पर: 6x + 8y - 14 = 0 तथा 6x + 8y + 16 = 0।

दूरी d = |c1 - c2| / √(a^2 + b^2) = |-14 - 16| / √(6^2 + 8^2) = 30 / 10 = 3 इकाई।

6.7 विगत वर्षों के प्रश्न (PYQs — हल सहित)

अभ्यास प्रश्न #61 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 1 [UPSC NDA 2024]: समीकरण 3|x| + 4|y| = 12 द्वारा परिबद्ध समचतुर्भुज का क्षेत्रफल कितना है?

(A) 12 वर्ग इकाई (B) 24 वर्ग इकाई (C) 48 वर्ग इकाई (D) 6 वर्ग इकाई

हल (B): IUC शॉर्ट-ट्रिक 1 से: क्षेत्रफल = (2 × c^2) / (a × b) = (2 × 144) / (3 × 4) = 288 / 12 = 24 वर्ग इकाई।

अभ्यास प्रश्न #62 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 2 [UPSC NDA 2025]: एक दीर्घवृत्त की नाभिलंब जीवा (Latus Rectum) की लंबाई उसके लघु अक्ष की आधी है। उस दीर्घवृत्त की उत्केंद्रता e क्या है?

(A) 1 / 2 (B) √3 / 2 (C) 1 / √2 (D) √3 / 4

हल (B): प्रश्नानुसार (2b^2) / a = (1/2) × (2b) = b ⇒ 2b = a ⇒ b / a = 1 / 2।

अतः e = √(1 - b^2 / a^2) = √(1 - 1/4) = √3 / 2।

अभ्यास प्रश्न #63 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 3 [Airforce X-Group 2024]: वृत्त x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0 की त्रिज्या क्या है?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) √14

हल (B): यहाँ g = -3, f = 4, c = -11। त्रिज्या r = √((-3)^2 + 4^2 - (-11)) = √(9 + 16 + 11) = √36 = 6।

अभ्यास प्रश्न #64 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 4 [TGT Maths 2023]: यदि अतिपरवलय x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1 की उत्केंद्रता 5/4 हो, तो उसके संयुग्मी अतिपरवलय की उत्केंद्रता क्या होगी?

(A) 4 / 3 (B) 5 / 3 (C) 3 / 5 (D) 5 / √7

हल (B): IUC शॉर्ट-ट्रिक 3 से 1 / e1^2 + 1 / e2^2 = 1 ⇒ 16/25 + 1 / e2^2 = 1 ⇒ 1 / e2^2 = 9/25 ⇒ e2 = 5 / 3।

अभ्यास प्रश्न #65 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 5 [UPSC NDA 2023]: शीर्षों (0, 0), (6, 0) तथा (0, 8) वाले त्रिभुज के परिकेंद्र और लंबकेंद्र के बीच की दूरी क्या है?

(A) 5 (B) 10 (C) 2.5 (D) 7.5

हल (A): यह मूलबिंदु $(0, 0)$ पर समकोण त्रिभुज है जिसका कर्ण $\sqrt{(6^2 + 8^2)} = 10$ है। समकोण त्रिभुज में लंबकेंद्र समकोण शीर्ष $(0, 0)$ और परिकेंद्र कर्ण का मध्य-बिंदु $(3, 4)$ होता है। दोनों के बीच की दूरी $=$ **कर्ण का आधा** $= 10 / 2 = 5$।

अभ्यास प्रश्न #66 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 6 [CUET PG Maths]: रेखा $y = 3x + c$ दीर्घवृत्त $x^2 / 16 + y^2 / 9 = 1$ को स्पर्श करती है यदि c का मान हो:

(A) $\pm\sqrt{13}$ (B) ± 15 (C) ± 5 (D) ± 12

हल (B): स्पर्श की शर्त $c = \pm\sqrt{(a^2 m^2 + b^2)}$ में $a^2 = 16, b^2 = 9, m = 3$ रखने पर: $c = \pm\sqrt{(16 \times 9 + 9)} = \pm\sqrt{153}$। (और यदि दीर्घवृत्त $x^2/24 + y^2/9 = 1$ हो तो $c = \pm\sqrt{(216+9)} = \pm 15$)।

अध्याय 7: सीमा, सांतत्य, अवकलनीयता एवं अवकलन के अनुप्रयोग (Limits, Continuity, Differentiability & AOD)

7.1 सीमा (Limits), अनिर्धार्य रूप एवं L'Hospital का नियम

• **सीमा के अस्तित्व की शर्त:** $\lim [x \to a] f(x)$ का अस्तित्व तभी होता है जब वामपक्ष सीमा ($LHL = \lim [x \to a-] f(x)$) और दक्षिणपक्ष सीमा ($RHL = \lim [x \to a+] f(x)$) दोनों परिमित और बराबर हों ($LHL = RHL$)।

• 7 **अनिर्धार्य रूप (Indeterminate Forms):** $0/0$, ∞/∞, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, तथा ∞^0।

• **एल-हॉस्पिटल का नियम (L'Hospital's Rule — $0/0$ या ∞/∞ के लिए):** अंश और हर का अलग-अलग x के सापेक्ष तब तक अवकलन करें जब तक अनिर्धार्य रूप समाप्त न हो जाए:

$$\lim [x \to a] [f(x) / g(x)] = \lim [x \to a] [f'(x) / g'(x)] = \lim [x \to a] [f''(x) / g''(x)]$$

मानक सीमाओं (Standard Limits) के महत्वपूर्ण सूत्र

1. **बीजगणितीय सीमा:** $\lim [x \to a] (x^n - a^n) / (x - a) = n \times a^{(n - 1)}$
2. **त्रिकोणमितीय सीमाएँ:** $\lim [x \to 0] (\sin x) / x = 1$, $\lim [x \to 0] (\tan x) / x = 1$, $\lim [x \to 0] (\sin^{-1} x) / x = 1$
3. **कोज्या की स्वर्णिम सीमा:** $\lim [x \to 0] (1 - \cos(ax)) / x^2 = a^2 / 2$ तथा $\lim [x \to 0] (1 - \cos(ax)) / (1 - \cos(bx)) = a^2 / b^2$
4. **चरघातांकी व लघुगणकीय सीमाएँ:** $\lim [x \to 0] (e^x - 1) / x = 1$, $\lim [x \to 0] (a^x - 1) / x = \ln(a)$, $\lim [x \to 0] \ln(1 + x) / x = 1$
5. 1^∞ **रूप का ब्रह्मास्त्र सूत्र:** यदि $\lim [x \to a] f(x) = 1$ तथा $\lim [x \to a] g(x) = \infty$ हो, तो:

$$\lim [x \to a] [f(x)]^{[g(x)]} = e^{[\lim (x \to a) g(x) \times (f(x) - 1)]}$$

• विशेष रूप: $\lim [x \to 0] (1 + kx)^{(1/x)} = e^k$ तथा $\lim [x \to \infty] (1 + k/x)^x = e^k$

7.2 सांतत्य (Continuity) एवं अवकलनीयता (Differentiability)

• **सांतत्य की शर्त:** फलन $f(x)$ बिंदु $x = a$ पर सतत (Continuous) कहलाता है यदि $LHL = RHL = f(a)$।

• **अवकलनीयता की शर्त:** फलन $x = a$ पर अवकलनीय कहलाता है यदि वामहस्त अवकलज (LHD) = दक्षिणहस्त अवकलज (RHD) परिमित रूप से बराबर हों। (जहाँ ग्राफ में नुकीला कोना / Sharp Corner बनता है, जैसे $|x - a|$ में $x = a$ पर, वहाँ फलन सतत तो होता है किंतु अवकलनीय नहीं होता)।

• **मूल प्रमेय:** प्रत्येक अवकलनीय फलन अनिवार्यतः सतत होता है, किंतु प्रत्येक सतत फलन का अवकलनीय होना आवश्यक नहीं है।

7.3 अवकलन के मानक सूत्र एवं विधियाँ (Differentiation Formulas & Methods)

मानक अवकलज एवं समाकलज की युग्मित तुलनात्मक सारणी (1D Calculus Reference)

क्र.सं.	फलन $f(x)$	अवकलज $d/dx [f(x)]$	संगत अनिश्चित समाकलन (अध्याय 8 संदर्भ)
1	x^n	$n \times x^{(n - 1)}$	$\int x^n dx = x^{(n + 1)} / (n + 1) + C$ ($n \neq -1$)
2	$\sqrt{x}$ एवं $1/x$	$d/dx(\sqrt{x}) = 1 / (2\sqrt{x})$, $d/dx(1/x) = -1 / x^2$	$\int (1 / \sqrt{x}) dx = 2\sqrt{x} + C$, `∫ (1/x) dx = ln\
3	e^x एवं a^x	$d/dx(e^x) = e^x$, $d/dx(a^x) = a^x \times \ln(a)$	$\int e^x dx = e^x + C$, $\int a^x dx = a^x / \ln(a) + C$
4	$\ln(x)$ एवं $\log_a(x)$	$d/dx(\ln x) = 1 / x$, $d/dx(\log_a x) = 1 / (x \ln a)$	$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + C$ (खंडशः समाकलन से)
5	$\sin x$ एवं $\cos x$	$d/dx(\sin x) = \cos x$, $d/dx(\cos x) = -\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$, $\int \cos x dx = \sin x + C$
6	$\tan x$ एवं $\cot x$	$d/dx(\tan x) = \sec^2(x)$, $d/dx(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2(x)$	`∫ tan x dx = ln\ sec x\ + C , ∫ cot x dx = ln\ sin x\ + C`
7	$\sec x$ एवं $\operatorname{cosec} x$	$d/dx(\sec x) = \sec x \tan x$, $d/dx(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$	`∫ sec x dx = ln\ sec x + tan x\ + C`
8	$\sin^{-1}(x)$ एवं $\cos^{-1}(x)$	$\pm 1 / \sqrt{(1 - x^2)}$	$\int dx / \sqrt{(a^2 - x^2)} = \sin^{-1}(x / a) + C$
9	$\tan^{-1}(x)$ एवं $\cot^{-1}(x)$	$\pm 1 / (1 + x^2)$	$\int dx / (a^2 + x^2) = (1/a) \tan^{-1}(x / a) + C$
10	$\sec^{-1}(x)$ एवं $\operatorname{cosec}^{-1}(x)$	`± 1 / (| x| × √(x^2 - 1))`	$\int dx / (x\sqrt{(x^2 - a^2)}) = (1/a) \sec^{-1}(x / a) + C$

• **गुणन नियम:** $d/dx(u \times v) = u \times (dv/dx) + v \times (du/dx)$

• **भाग नियम:** $d/dx(u / v) = [v \times (du/dx) - u \times (dv/dx)] / v^2$

• **प्राचलिक अवकलन (Parametric):** यदि $x = f(t), y = g(t)$ हो, तो $dy/dx = (dy/dt) / (dx/dt)$ तथा **द्वितीय कोटि का अवकलज:** $d^2y / dx^2 = d/dt(dy/dx) \times (dt/dx)$ (ध्यान दें: यहाँ अंत में dt/dx से गुणा करना छात्र अक्सर भूल जाते हैं!)।

7.4 अवकलन के अनुप्रयोग (Applications of Derivatives — AOD)

1. **राशियों के परिवर्तन की दर:** वृत्त के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर `dA/dt = 2πr × (dr/dt)` तथा गोले के आयतन की दर `dV/dt = 4πr^2 × (dr/dt)`।

2. **स्पर्श रेखा (Tangent) एवं अभिलंब (Normal):**

• वक्र `y = f(x)` के बिंदु `(x1, y1)` पर स्पर्श रेखा की प्रवणता `m_T = (dy/dx)_(x1,y1)` तथा अभिलंब की प्रवणता `m_N = -1 / m_T`।

• स्पर्श रेखा का समीकरण: `y - y1 = m_T × (x - x1)` तथा अभिलंब का समीकरण: `y - y1 = (-1 / m_T) × (x - x1)`।

3. **वर्धमान (Increasing) एवं ह्रासमान (Decreasing) फलन:** अंतराल `I` में यदि `f'(x) ≥ 0` हो तो फलन वर्धमान है, और यदि `f'(x) ≤ 0` हो तो ह्रासमान है।

4. **उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ (Maxima & Minima — द्वितीय अवकलज परीक्षण):**

• चरण 1: क्रांतिक बिंदु (Critical Points) निकालने के लिए `f'(x) = 0` रखें। माना मूल `x = c` प्राप्त हुआ।

• चरण 2: यदि `f''(c) < 0` (ऋणात्मक), तो `x = c` पर **स्थानीय उच्चिष्ठ (Local Maxima)** होगा और उच्चिष्ठ मान `= f(c)`।

• चरण 3: यदि `f''(c) > 0` (धनात्मक), तो `x = c` पर **स्थानीय निम्निष्ठ (Local Minima)** होगा और निम्निष्ठ मान `= f(c)`।

• चरण 4: यदि `f''(c) = 0` तथा `f'''(c) ≠ 0`, तो `x = c` को **नति परिवर्तन बिंदु (Point of Inflection)** कहते हैं।

7.5 IUC सुपर-फास्ट शॉर्ट-ट्रिक्स (Chapter 7 Short-Tricks)

• **ट्रिक 1 (अस्पष्ट समीकरण `F(x, y) = 0` का अवकलन 5 सेकंड में):**

आंशिक अवकलन सूत्र: `dy/dx = -(∂F / ∂x) / (∂F / ∂y)` (अर्थात अंश में `y` को अचर मानकर `x` के सापेक्ष अवकलन करें, हर में `x` को अचर मानकर `y` के सापेक्ष अवकलन करें और आगे ऋण चिह्न लगा दें!)।

• **ट्रिक 2 (अनंत श्रेणी `y = √(f(x) + √(f(x) + √(f(x) + ... ∞)))` का अवकलन):**

इसका अवकलज सदैव `dy/dx = f'(x) / (2y - 1)` होता है!

• **ट्रिक 3 (अनंत घात टॉवर `y = f(x)^(f(x)^(f(x)...∞))` का अवकलन):**

इसका अवकलज सदैव `dy/dx = [y^2 × f'(x)] / [f(x) × (1 - y ln(f(x)))]` होता है!

• **ट्रिक 4 (`f(x)^g(x)` प्रकार के चर-की-घात-चर का सीधा अवकलन):**

`d/dx [u^v] = u^v × [ (v / u) × u' + v' × ln(u) ]`।

7.6 हल सहित उदाहरण (Solved Examples)

अभ्यास प्रश्न #67 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 7.1: `lim [x → 0] [ (1 - cos 4x) / (1 - cos 6x) ]` का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

कोज्या की स्वर्णिम सीमा `lim [x → 0] (1 - cos ax) / (1 - cos bx) = a^2 / b^2` से:

यहाँ `a = 4, b = 6 ⇒ मान = 4^2 / 6^2 = 16 / 36 = 4 / 9`।

अभ्यास प्रश्न #68 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 7.2: $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+5}{x-1}\right)^x$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

यह 1^∞ अनिर्धार्य रूप है। सूत्र $e^{\lim (x \to \infty) g(x) \times (f(x) - 1)}$ लगाने पर:

घात $= \lim_{x \to \infty} x \times \left[\frac{x+5}{x-1} - 1\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{6x}{x-1} = 6$। अतः सीमा का मान $= e^6$।

अभ्यास प्रश्न #69 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 7.3: यदि $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल:

IUC शॉर्ट-ट्रिक 1 से: माना $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$।

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} = -\frac{3x^2 - 3ay}{3y^2 - 3ax} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$।

अभ्यास प्रश्न #70 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 7.4: यदि $y = \sqrt{(\sin x + \sqrt{(\sin x + \sqrt{(\sin x + \ldots \infty)})})}$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल:

IUC शॉर्ट-ट्रिक 2 से: यहाँ $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$। अतः $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y - 1}$।

अभ्यास प्रश्न #71 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 7.5: फलन $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ (जहाँ $x > 0$) का उच्चिष्ठ मान (Maximum Value) ज्ञात कीजिए।

हल:

अवकलन करने पर: $f'(x) = \frac{x \times (1/x) - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$।

उच्चिष्ठ/निम्निष्ठ के लिए $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$।

$x = e$ पर $f''(e) = -\frac{1}{e^3} < 0$ (अतः उच्चिष्ठ है)। उच्चिष्ठ मान $= f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$।

7.7 विगत वर्षों के प्रश्न (PYQs — हल सहित)

अभ्यास प्रश्न #72 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 1 [UPSC NDA 2024]: फलन $f(x) = |x - 2| + |x - 5|$ अंतराल R पर कितने बिंदुओं पर अवकलनीय नहीं है?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) अनंत

हल (C): मापांक फलन अपने क्रांतिक बिंदुओं $x = 2$ तथा $x = 5$ पर नुकीला कोना बनाता है, अतः यह 2 बिंदुओं पर अवकलनीय नहीं है (यद्यपि यह सर्वत्र सतत है)।

अभ्यास प्रश्न #73 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 2 [UPSC NDA 2025]: यदि $x = a\cos^3(\theta)$ तथा $y = a\sin^3(\theta)$ हो, तो $\theta = \pi/4$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान क्या होगा?

(A) 1 (B) $\frac{4\sqrt{2}}{3a}$ (C) $\frac{4}{3a}$ (D) -1

हल (B): $\frac{dy}{dx} = \frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta} = -\tan\theta$।

पुनः $d^2y / dx^2 = d/d\theta(-\tan\theta) \times (d\theta / dx) = (-\sec^2\theta) / (-3a\cos^2\theta\sin\theta) = \sec^4(\theta)\operatorname{cosec}(\theta) / (3a)$।

$\theta = \pi/4$ रखने पर: $= [(\sqrt{2})^4 \times \sqrt{2}] / (3a) = (4\sqrt{2}) / (3a)$।

अभ्यास प्रश्न #74 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 3 [CUET UG 2024]: फलन $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$ किस अंतराल में वर्धमान (Increasing) है?

(A) $(2, 3)$ (B) $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$ (C) $(0, 2)$ (D) $[-2, 3]$

हल (B): $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x - 2)(x - 3) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$।

अभ्यास प्रश्न #75 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 4 [Airforce X-Group 2024]: $\lim_{x \to 0} (e^{3x} - e^{x}) / \sin(2x)$ का मान क्या है?

(A) 1 (B) 2 (C) $3/2$ (D) $1/2$

हल (A): L'Hospital नियम से अंश और हर का अवकलन करने पर: $\lim_{x \to 0} (3e^{3x} - e^{x}) / (2\cos 2x) = (3 - 1) / 2 = 1$।

अभ्यास प्रश्न #76 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 5 [PGT Maths 2023]: $x > 0$ के लिए x^x का न्यूनतम मान किस बिंदु पर प्राप्त होता है?

(A) $x = e$ (B) $x = 1 / e$ (C) $x = 1$ (D) $x = 1 / e^2$

हल (B): $y = x^x \Rightarrow dy/dx = x^x(1 + \ln x) = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = 1 / e$ (तथा न्यूनतम मान $= (1/e)^{(1/e)}$)।

अभ्यास प्रश्न #77 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 6 [UPSC NDA 2023]: वक्र $y^2 = 4x$ के बिंदु $(1, 2)$ पर अभिलंब (Normal) का समीकरण क्या है?

(A) $x + y = 3$ (B) $x - y + 1 = 0$ (C) $x + 2y = 5$ (D) $2x + y = 4$

हल (A): $2y(dy/dx) = 4 \Rightarrow dy/dx = 2/y$। बिंदु $(1, 2)$ पर स्पर्श रेखा की ढाल $m_T = 2/2 = 1$, अतः अभिलंब की ढाल $m_N = -1$। समीकरण: $y - 2 = -1(x - 1) \Rightarrow x + y = 3$।

अध्याय 8: अनिश्चित एवं निश्चित समाकलन तथा वक्रों से घिरा क्षेत्रफल (Indefinite & Definite Integration & Area under Curves)

8.1 अनिश्चित समाकलन के मानक सूत्र एवं विधियाँ

समाकलन अवकलन की व्युत्क्रम प्रक्रिया (Anti-derivative) है: यदि $d/dx[F(x)] = f(x)$, तो $\int f(x)\,dx = F(x) + C$।

प्रतिस्थापन एवं विशेष 9 मानक समाकलनों के महत्वपूर्ण सूत्र

1. **अंश में हर का अवकलज होने पर:** $\int [f'(x) / f(x)]\,dx = \ln|f(x)| + C$ तथा $\int [f'(x) / \sqrt{f(x)}]\,dx = 2\sqrt{f(x)} + C$
2. **घात नियम प्रतिस्थापन:** $\int [f(x)]^n \times f'(x)\,dx = [f(x)]^{n+1} / (n + 1) + C$ ($n \neq -1$)
3. $\int dx / (x^2 - a^2) = [1 / (2a)] \times \ln|(x - a) / (x + a)| + C$
4. $\int dx / (a^2 - x^2) = [1 / (2a)] \times \ln|(a + x) / (a - x)| + C$
5. $\int dx / \sqrt{(x^2 \pm a^2)} = \ln|x + \sqrt{(x^2 \pm a^2)}| + C$
6. $\int \sqrt{(a^2 - x^2)}\,dx = (x / 2)\sqrt{(a^2 - x^2)} + (a^2 / 2)\sin^{-1}(x / a) + C$

7. $\int \sqrt{(x^2 \pm a^2)}\, dx = (x/2)\sqrt{(x^2 \pm a^2)} \pm (a^2/2) \ln|x + \sqrt{(x^2 \pm a^2)}| + C$

8. **खंडशः समाकलन (Integration by Parts — ILATE क्रम: Inverse, Log, Algebraic, Trigonometric, Exponential):**

$\int (u \times v)\, dx = u \times (\int v\, dx) - \int [\, (du/dx) \times (\int v\, dx)\,]\, dx$

9. **स्वर्णिम निरसन समाकलन (Cancellation Law):** $\int e^x \times [f(x) + f'(x)]\, dx = e^x \times f(x) + C$

8.2 निश्चित समाकलन के गुणधर्म (Properties of Definite Integrals)

न्यूटन-लाइबनिज के मूलभूत प्रमेय से: $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$।

निश्चित समाकलन के 7 महारथी गुणधर्म (1D Properties Table)

गुणधर्म क्र.	गणितीय रूप (1D Definite Integral Property)	परीक्षा में उपयोग एवं शर्त (Exam Application)
P1 & P2	$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt = -\int_b^a f(x)\, dx$	चर परिवर्तन से मान नहीं बदलता; सीमाएँ पलटने पर चिह्न बदल जाता है
P3 (विभाजन)	$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$	मापांक `|x - c|` तथा महत्तम पूर्णांक `[x]` के प्रश्नों को तोड़ने में
P4 (King's)	$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a + b - x)\, dx$	King's Property: x को (निचली सीमा + ऊपरी सीमा - x) से बदलें
P5 (विशेष King)	$\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a - x)\, dx$	त्रिकोणमितीय एवं लघुगणकीय समाकलनों के 70% प्रश्न इसी से हल होते हैं
P6 (सम-विषम)	$\int_{-a}^a f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$ (सम), या $= 0$ (विषम)	यदि $f(-x) = -f(x)$ (विषम फलन), तो उत्तर बिना हल किए सीधे 0 होता है!
P7 (Queen's)	$\int_0^{2a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$ (यदि $f(2a - x) = f(x)$)	और यदि $f(2a - x) = -f(x)$ हो, तो समाकलन का मान सीधे 0 होता है
P8 (आवर्ती)	$\int_0^{nT} f(x)\, dx = n \times \int_0^T f(x)\, dx$	जहाँ T फलन $f(x)$ का मूल आवर्तकाल (Fundamental Period) है

- **लाइबनिज नियम (Leibnitz Rule — समाकलन चिह्न के अंतर्गत अवकलन):**

$d/dx\, [\, \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\, dt\,] = f(\psi(x)) \times \psi'(x) - f(\varphi(x)) \times \varphi'(x)$

8.3 वक्रों से घिरा क्षेत्रफल (Area under Curves — Quadrature)

1. वक्र $y = f(x)$, X-अक्ष तथा कोटियों $x = a$ व $x = b$ से घिरा क्षेत्रफल: $A = \int_a^b |y|\, dx$
2. दो वक्रों $y = f(x)$ तथा $y = g(x)$ के बीच घिरा क्षेत्रफल: $A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$
3. **परीक्षापयोगी मानक क्षेत्रफल:**

- $\sin x$ या $\cos x$ के एक अर्ध-चक्र (0 से π) से घिरा क्षेत्रफल $= 2$ वर्ग इकाई (तथा 0 से 2π में कुल क्षेत्रफल $= 4$ वर्ग इकाई)।
- परवलय $y^2 = 4ax$ तथा सरल रेखा $y = mx$ से घिरा क्षेत्रफल $= (8 \times a^2)/(3 \times m^3)$ वर्ग इकाई।

8.4 IUC सुपर-फास्ट शॉर्ट-ट्रिक्स (Chapter 8 Short-Tricks)

• **ट्रिक 1 (King's Property का (b - a) / 2 ब्रह्मास्त्र):**

प्रारूप $I = \int_{a}^{b} \frac{f(x)}{f(x)+f(a+b-x)}\,dx$ का मान बिना किसी गणना के सदैव $\frac{b-a}{2}$ (अर्थात $\frac{\text{ऊपरी सीमा} - \text{निचली सीमा}}{2}$) होता है!

• विशेष रूप: $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\,dx = \frac{\pi}{4}$ (चाहे घात n कुछ भी हो!)।

• **ट्रिक 2 (वॉलिस का सूत्र — Wallis Formula $\int_{0}^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_{0}^{\pi/2} \cos^n x\,dx$):**

$I_n = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \ldots \times \frac{1 \text{ या } 2}{3} \times K$, जहाँ $K = \pi/2$ केवल तभी गुणा होगा जब n **सम (Even)** हो; यदि n विषम हो तो $K = 1$ रहेगा।

• **ट्रिक 3 (प्रसिद्ध लॉग-साइन समाकलन):**

सदैव याद रखें: $\int_{0}^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx = \int_{0}^{\pi/2} \ln(\cos x)\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$ तथा $\int_{0}^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$।

8.5 हल सहित उदाहरण (Solved Examples)

अभ्यास प्रश्न #78 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 8.1: $\int e^x \times \left[\frac{x-1}{(x+1)^3}\right] dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

अंश $x - 1$ को $(x + 1) - 2$ लिखने पर:

$\int e^x \times \left[\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3}\right] dx$।

यहाँ $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ है जिसका अवकलज $f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$ है।

अतः निरसन नियम $\int e^x [f(x) + f'(x)]\,dx = e^x f(x) + C$ से उत्तर $= \frac{e^x}{(x+1)^2} + C$।

अभ्यास प्रश्न #79 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 8.2: $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

इसे $\sin x$ और $\cos x$ में बदलने पर यह $\int_{a}^{b} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}\,dx$ बनता है, जहाँ $a + b = \pi/6 + \pi/3 = \pi/2$।

IUC शॉर्ट-ट्रिक 1 से इसका सीधा मान $= \frac{b-a}{2} = \frac{\pi/3 - \pi/6}{2} = \frac{\pi/6}{2} = \frac{\pi}{12}$।

अभ्यास प्रश्न #80 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 8.3: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [x^3 \cos x + \tan^5 x + 1]\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

यहाँ $x^3 \cos x$ तथा $\tan^5 x$ दोनों विषम फलन ($f(-x) = -f(x)$) हैं, इसलिए $[-\pi/2, \pi/2]$ में उनका समाकलन शून्य (0) होगा।

केवल अचर पद 1 बचेगा: $= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\,dx = 2 \times (\pi/2) = \pi$।

अभ्यास प्रश्न #81 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 8.4: $\int_0^{\pi/2} \sin^6(x)\,dx$ का मान वॉलिस सूत्र से ज्ञात कीजिए।

हल:

यहाँ $n = 6$ (सम संख्या) है, अत: अंत में $\pi/2$ से गुणा होगा:

$I = (5/6) \times (3/4) \times (1/2) \times (\pi/2) = 15\pi / 96 = 5\pi / 32$।

अभ्यास प्रश्न #82 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 8.5: परवलयों $y^2 = 12x$ तथा $x^2 = 12y$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल:

यहाँ $4a = 12 \Rightarrow a = 3$ तथा $4b = 12 \Rightarrow b = 3$।

सूत्र $(16/3)\,a \times b$ से: क्षेत्रफल $= (16 / 3) \times 3 \times 3 = 48$ वर्ग इकाई।

8.6 विगत वर्षों के प्रश्न (PYQs — हल सहित)

अभ्यास प्रश्न #83 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 1 [UPSC NDA 2024]: $\int_0^3 [x]\,dx$ का मान क्या है, जहाँ $[x]$ महत्तम पूर्णांक फलन (GIF) है?

(A) 3 (B) 4.5 (C) 6 (D) 2

हल (A): पूर्णांकों पर सीमा को तोड़ने पर: $\int_0^1 0\,dx + \int_1^2 1\,dx + \int_2^3 2\,dx = 0 + 1 + 2 = 3$।

(शॉर्टकट: $\int_0^n [x]\,dx = n(n-1)/2 = 3 \times 2 / 2 = 3$)।

अभ्यास प्रश्न #84 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 2 [UPSC NDA 2025]: $\int_2^8 \left[\sqrt{(10-x)} / (\sqrt{x} + \sqrt{(10-x)})\right] dx$ का मान क्या है?

(A) 6 (B) 3 (C) 4 (D) 5

हल (B): यहाँ $a = 2, b = 8$ तथा $a + b - x = 10 - x$। IUC शॉर्ट-ट्रिक 1 से मान $= (b - a) / 2 = (8 - 2) / 2 = 3$।

अभ्यास प्रश्न #85 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 3 [CUET UG 2024]: परवलय $y^2 = 8x$ और उसके नाभिलंब (Latus Rectum) से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल कितना है?

(A) $16/3$ वर्ग इकाई (B) $32/3$ वर्ग इकाई (C) $8/3$ वर्ग इकाई (D) $64/3$ वर्ग इकाई

हल (B): यहाँ $4a = 8 \Rightarrow a = 2$। सूत्र $(8/3)\,a^2$ से क्षेत्रफल $= (8/3) \times 2^2 = 32 / 3$ वर्ग इकाई।

अभ्यास प्रश्न #86 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 4 [Airforce X-Group 2024]: $\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx$ का मान क्या होगा?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 1

हल (C): $|\sin x|$ के एक अर्ध-चक्र (0 से π) का क्षेत्रफल 2 होता है। 0 से 2π में 2 अर्ध-चक्र बनते हैं, अत: मान $= 2 \times 2 = 4$।

अभ्यास प्रश्न #87 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 5 [TGT/PGT Maths 2023]: $\int \left(dx / (x \times (x^7 + 1))\right)$ का मान क्या है?

(A) $\ln|x^7/(x^7+1)|+C$ (B) $(1/7)\ln|x^7/(x^7+1)|+C$ (C) $(1/7)\ln|(x^7+1)/x^7|+C$ (D) $7\ln|x/(x^7+1)|+C$

हल (B): शॉर्टकट सूत्र $\int dx/[x(x^n+1)] = (1/n)\ln|x^n/(x^n+1)|+C$ में $n=7$ रखने पर विकल्प (B) प्राप्त होता है।

अभ्यास प्रश्न #88 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 6 [UPSC NDA 2023]: यदि $F(x) = \int_{0}^{x^2} \cos(\sqrt{t})\,dt$ हो, तो $F'(x)$ किसके बराबर है?

(A) $2x\cos x$ (B) $\cos x$ (C) $2x\sin x$ (D) $x\cos(x^2)$

हल (A): लाइबनिज नियम से: $F'(x) = \cos(\sqrt{(x^2)}) \times d/dx(x^2) - 0 = \cos(x) \times (2x) = 2x\cos x$।

अध्याय 9: अवकल समीकरण (Differential Equations — कोटि, घात एवं हल की विधियाँ)

9.1 अवकल समीकरण की कोटि (Order) एवं घात (Degree)

स्वतंत्र चर x, परतंत्र चर y तथा अवकल गुणांकों ($dy/dx, d^2y/dx^2, \ldots$) से युक्त समीकरण को अवकल समीकरण कहते हैं।

1. **कोटि (Order):** किसी अवकल समीकरण में उपस्थित **उच्चतम कोटि के अवकलज (Highest Order Derivative)** की कोटि को ही उस अवकल समीकरण की कोटि कहते हैं। कोटि सदैव एक धनात्मक पूर्णांक होती है और प्रत्येक अवकल समीकरण के लिए परिभाषित होती है।

2. **घात (Degree):** जब अवकल समीकरण को सभी अवकलजों के संदर्भ में भिन्नात्मक घातों या करणी चिह्नों (Radicals) से मुक्त कर बहुपद (Polynomial in derivatives) के रूप में लिखा जाए, तब **उच्चतम कोटि के अवकलज की उच्चतम घात** को समीकरण की घात कहते हैं।

• **अति-महत्वपूर्ण नियम:** यदि किसी अवकल समीकरण में $\sin(dy/dx)$, $\cos(d^2y/dx^2)$, $e^{(dy/dx)}$ या $\ln(dy/dx)$ जैसे पद हों जिन्हें अवकलजों के बहुपद रूप में न बदला जा सके, तो उसकी **घात अपरिभाषित (Degree is Not Defined)** होती है!

9.2 अवकल समीकरण का निर्माण एवं प्रथम कोटि-प्रथम घात के समीकरणों का हल

• **स्वेच्छ अचरों का विलोपन (Formation Rule):** किसी वक्र कुल के समीकरण में जितने स्वतंत्र स्वेच्छ अचर (Independent Arbitrary Constants) होते हैं, उससे बनने वाले अवकल समीकरण की **कोटि (Order)** ठीक उतनी ही होती है।

प्रथम कोटि एवं प्रथम घात के अवकल समीकरणों को हल करने की 4 मानक विधियाँ (1D Table)

विधि का नाम (Method)	मानक रूप (1D Standard Form)	समाकलन गुणक (IF) / प्रतिस्थापन	व्यापक हल का सीधा सूत्र (General Solution)
1. चर पृथक्करण (Variable Separable)	$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$	सीधे चरों को dx व dy के साथ अलग करें	$\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = C$
2. समघातीय समीकरण (Homogeneous)	$dy/dx = f(y/x)$ (अंश व हर की घात समान)	$y = vx$ रखें $\Rightarrow dy/dx = v + x(dv/dx)$	$\int [dv/(f(v)-v)] = \int (dx/x) + C$
3. रैखिक समीकरण (प्रकार 1: y में)	$dy/dx + P(x)\times y = Q(x)$	समाकलन गुणक $IF = e^{\int P(x)\,dx}$	$y \times (IF) = \int [Q(x)\times(IF)]\,dx + C$
4. रैखिक समीकरण (प्रकार 2: x में)	$dx/dy + P(y)\times x = Q(y)$	समाकलन गुणक $IF = e^{\int P(y)\,dy}$	$x \times (IF) = \int [Q(y)\times(IF)]\,dy + C$
5. बर्नौली समीकरण (Bernoulli's)	$dy/dx + P(x)\times y = Q(x)\times y^n$	दोनों पक्षों में y^n से भाग देकर $y^{(1-n)} = v$ रखें	यह $dv/dx + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)$ में बदल जाता है

9.3 वक्र कुलों के मानक अवकल समीकरण (सीधे याद रखने योग्य)

1. मूलबिंदु से गुजरने वाली सभी सरल रेखाओं (`y = mx`) का अवकल समीकरण: `y = x × (dy/dx)` (कोटि `= 1`)।
2. सभी सरल रेखाओं (`y = mx + c` , दो स्वेच्छ अचर) का अवकल समीकरण: `d^2y / dx^2 = 0` (कोटि `= 2`)।
3. मूलबिंदु पर केंद्र वाले सभी वृत्तों (`x^2 + y^2 = r^2`) का अवकल समीकरण: `x + y × (dy/dx) = 0` (कोटि `= 1`)।
4. समतल में सभी वृत्तों (`(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2` , तीन अचर) के अवकल समीकरण की कोटि `= 3` होती है।
5. सभी शांकवों (व्यापक समीकरण में 5 स्वतंत्र अचर) के अवकल समीकरण की कोटि `= 5` होती है।

9.4 IUC सुपर-फास्ट शॉर्ट-ट्रिक्स (Chapter 9 Short-Tricks)

- **ट्रिक 1 (यथातथ अवकलज — Exact Differentials की तुरंत पहचान):**
- `x dy + y dx = d(xy)`
- `(x dy - y dx) / x^2 = d(y / x)`
- `(y dx - x dy) / y^2 = d(x / y)`
- `(x dx + y dy) / (x^2 + y^2) = (1/2) d[ln(x^2 + y^2)]`
- `(x dy - y dx) / (x^2 + y^2) = d[tan^-1(y / x)]`
- **ट्रिक 2 (`e^(∫ (f'(x)/f(x)) dx)` का सीधा मान):**

रैखिक अवकल समीकरण में यदि `P(x) = k / x` हो, तो समाकलन गुणक `IF = e^(k ln x) = x^k` होता है! और यदि `P(x) = -k / x` हो, तो `IF = 1 / x^k` होता है!

9.5 हल सहित उदाहरण (Solved Examples)

अभ्यास प्रश्न #89 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 9.1: अवकल समीकरण `[1 + (dy/dx)^2]^(3/2) = k × (d^2y / dx^2)` की कोटि (Order) तथा घात (Degree) ज्ञात कीजिए।

हल:

उच्चतम अवकलज `d^2y / dx^2` है, अतः **कोटि (Order)** `= 2` ।

करणी घात `3/2` हटाने के लिए दोनों पक्षों का वर्ग करने पर: `[1 + (dy/dx)^2]^3 = k^2 × (d^2y / dx^2)^2` ।

अब उच्चतम कोटि के अवकलज `d^2y / dx^2` की घात `2` है, अतः **घात (Degree)** `= 2` ।

अभ्यास प्रश्न #90 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 9.2: अवकल समीकरण `x × (dy/dx) + 2y = x^2` (`x ≠ 0`) का समाकलन गुणक (IF) तथा व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल:

`x` से भाग देकर मानक रूप `dy/dx + P(x)y = Q(x)` में बदलने पर: `dy/dx + (2/x)y = x` ।

यहाँ `P(x) = 2/x` तथा `Q(x) = x` ।

समाकलन गुणक `IF = e^(∫ (2/x) dx) = e^(2 ln x) = x^2` ।

व्यापक हल: `y × x^2 = ∫ (x × x^2) dx + C = ∫ x^3 dx + C ⇒ x^2 y = x^4 / 4 + C` ।

अभ्यास प्रश्न #91 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 9.3: अवकल समीकरण $dy/dx = e^{(x - y)} + x^2 e^{(-y)}$ को हल कीजिए।

हल:

$dy/dx = e^{(-y)} \times (e^x + x^2) \Rightarrow e^y dy = (e^x + x^2) dx$ (चर पृथक्करण रूप)।

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर: $e^y = e^x + x^3 / 3 + C$।

अभ्यास प्रश्न #92 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 9.4: उस परवलय कुल का अवकल समीकरण की कोटि क्या होगी जिनका शीर्ष मूलबिंदु पर हो और अक्ष धनात्मक X-अक्ष के अनुदिश हो?

हल:

ऐसे परवलयों का समीकरण $y^2 = 4ax$ होता है जिसमें केवल 1 स्वेच्छ अचर (a) है। अतः अवकल समीकरण की कोटि $= 1$ होगी (तथा समीकरण $y = 2x(dy/dx)$ होगा)।

अभ्यास प्रश्न #93 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 9.5: समीकरण $x\,dy - y\,dx = (x^2 + y^2)\,dx$ को हल कीजिए।

हल:

$(x\,dy - y\,dx) / (x^2 + y^2) = dx$। IUC शॉर्ट-ट्रिक 1 से बायाँ पक्ष $d[\tan^{-1}(y / x)]$ है।

समाकलन करने पर: $\tan^{-1}(y / x) = x + C \Rightarrow y = x \tan(x + C)$।

9.6 विगत वर्षों के प्रश्न (PYQs — हल सहित)

अभ्यास प्रश्न #94 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 1 [UPSC NDA 2024]: अवकल समीकरण $d^2y / dx^2 + \cos(dy/dx) = 0$ की कोटि (Order) और घात (Degree) क्रमशः क्या हैं?

(A) $2, 1$ (B) **2, अपरिभाषित** (C) $1, 2$ (D) **अपरिभाषित, 2**

हल (B): उच्चतम अवकलज d^2y/dx^2 है इसलिए कोटि $= 2$। किंतु $\cos(dy/dx)$ पद के कारण यह अवकलजों में बहुपद नहीं है, अतः इसकी घात **अपरिभाषित** है।

अभ्यास प्रश्न #95 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 2 [CUET UG 2024]: अवकल समीकरण $\cos x\,(dy/dx) + y \sin x = 1$ का समाकलन गुणक (Integrating Factor) क्या है?

(A) $\cos x$ (B) $\sec x$ (C) $\tan x$ (D) $\sin x$

हल (B): $\cos x$ से भाग देने पर: $dy/dx + (\tan x)\,y = \sec x$। यहाँ $P(x) = \tan x$, अतः $IF = e^{(\int \tan x\,dx)} = e^{(\ln|\sec x|)} = \sec x$।

अभ्यास प्रश्न #96 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 3 [UPSC NDA 2025]: अवकल समीकरण $dy/dx + y / x = 0$ का व्यापक हल क्या है?

(A) $xy = C$ (B) $y = Cx$ (C) $x + y = C$ (D) $x^2 + y^2 = C$

हल (A): $x\,dy + y\,dx = 0 \Rightarrow d(xy) = 0 \Rightarrow xy = C$ (आयताकार अतिपरवलय कुल)।

अभ्यास प्रश्न #97 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 4 [Airforce X-Group 2024]: समीकरण $y = A\cos(3x) + B\sin(3x)$ (जहाँ A, B स्वेच्छ अचर हैं) से बनने वाला अवकल समीकरण कौन-सा है?

(A) $d^2y/dx^2 + 3y = 0$ (B) $d^2y/dx^2 + 9y = 0$ (C) $d^2y/dx^2 - 9y = 0$ (D) $dy/dx + 9y = 0$

हल (B): सरल आवर्त गति के मानक समीकरण $y = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ का अवकल समीकरण सदैव $d^2y/dx^2 + \omega^2 y = 0$ होता है। यहाँ $\omega = 3 \Rightarrow d^2y/dx^2 + 9y = 0$।

अभ्यास प्रश्न #98 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 5 [PGT Maths 2023]: अवकल समीकरण $y = x(dy/dx) + a/(dy/dx)$ (क्लेरॉउट का समीकरण) की कोटि और घात क्या हैं?

(A) $1, 1$ (B) $1, 2$ (C) $2, 1$ (D) $2, 2$

हल (B): dy/dx से गुणा करने पर $y(dy/dx) = x(dy/dx)^2 + a$। यहाँ उच्चतम अवकलज dy/dx है जिसकी कोटि $= 1$ और उच्चतम घात $= 2$ है।

अभ्यास प्रश्न #99 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 6 [UPSC NDA 2023]: एक जीवाणु संस्कृति में जीवाणुओं की वृद्धि की दर उपस्थित संख्या N के समानुपाती है ($dN/dt = kN$)। यदि 3 घंटे में संख्या दोगुनी हो जाती है, तो कितने घंटों में वह प्रारंभिक संख्या की 8 गुनी हो जाएगी?

(A) 6 घंटे (B) 9 घंटे (C) 12 घंटे (D) 24 घंटे

हल (B): चरघातांकी वृद्धि में प्रत्येक 3 घंटे में संख्या 2 गुनी होती है। अतः $8 = 2^3$ गुना होने में लगा समय $= 3 \times 3 = 9$ घंटे।

अध्याय 10: सदिश बीजगणित, त्रि-विमीय ज्यामिति, प्रायिकता एवं सांख्यिकी (Vectors, 3D Geometry, Probability & Statistics)

10.1 सदिश बीजगणित: अदिश (Dot) एवं सदिश (Cross) गुणनफल

यदि $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ दो सदिश हों:

- **मापांक एवं मात्रक सदिश (Unit Vector):** $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ तथा $\mathbf{a}$ की दिशा में मात्रक सदिश $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$।

अदिश गुणनफल ($\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$) एवं सदिश गुणनफल ($\mathbf{a}\times\mathbf{b}$) की तुलनात्मक सारणी

गुणधर्म (Property)	अदिश / बिंदु गुणनफल (Dot Product $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$)	सदिश / वज्र गुणनफल (Cross Product $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$)								
सूत्र एवं प्रकृति	`a · b = |	a|	|	b|	cos θ` (अदिश राशि)	`a × b = (|	a|	|	b|	sin θ) n̂ (सदिश राशि, a व b` दोनों के लंबवत)
घटक रूप (Component)	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1\times b_1 + a_2\times b_2 + a_3\times b_3$	सारणिक `|	(i, j, k), (a1, a2, a3), (b1, b2, b3)|	`							

गुणधर्म (Property)	अदिश / बिंदु गुणनफल (Dot Product `a · b`)	सदिश / वज्र गुणनफल (Cross Product `a × b`)
क्रमविनिमेय नियम	`a · b = b · a` (पालन करता है)	`a × b = -(b × a)` (प्रति-क्रमविनिमेय)
मात्रक सदिश संबंध	`i·i = j·j = k·k = 1` तथा `i·j = j·k = k·i = 0`	`i×i = j×j = k×k = 0` तथा `i×j = k, j×k = i, k×i = j`
लंबवत व समानांतर शर्त	लंबवत (`θ = 90°`) यदि `a · b = 0`	समानांतर/संरेखीय (`θ = 0°`) यदि `a × b = 0`
ज्यामितीय अनुप्रयोग	`a` का `b` पर प्रक्षेप (Projection) `= (a · b) / \`	`b\`

`	समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल `= \`	`a × b\`	`; त्रिभुज का क्षेत्रफल` = `(1/2)\`	`a × b\`	`

- **लैग्रेंज की सर्वसमिका (Lagrange's Identity):** `|a × b|^2 + (a · b)^2 = |a|^2 × |b|^2`
- **अदिश त्रिक गुणनफल (Scalar Triple Product `[a b c] = a · (b × c)`):** यह समांतर षट्फलक (Parallelepiped) का आयतन देता है। तीन सदिश **समतलीय (Coplanar)** होंगे यदि और केवल यदि `[a b c] = 0`।

10.2 त्रि-विमीय ज्यामिति (3D Geometry — दिक्-कोसाइन, सरल रेखा एवं समतल)

1. **दिक्-कोसाइन (`l = cos α, m = cos β, n = cos γ`) एवं दिक्-अनुपात (`a, b, c`):**
- स्वर्णिम सर्वसमिका: `l^2 + m^2 + n^2 = 1` अर्थात `cos^2(α) + cos^2(β) + cos^2(γ) = 1`
- अतः `sin^2(α) + sin^2(β) + sin^2(γ) = 2` तथा `cos(2α) + cos(2β) + cos(2γ) = -1`।
- रूपांतरण: `l = ± a / √(a^2 + b^2 + c^2), m = ± b / √(a^2 + b^2 + c^2), n = ± c / √(a^2 + b^2 + c^2)`।

2. **दो रेखाओं के बीच का कोण:** `cos θ = |l1×l2 + m1×m2 + n1×n2| = |a1×a2 + b1×b2 + c1×c2| / [√(a1^2+b1^2+c1^2) × √(a2^2+b2^2+c2^2)]`

3. **अंतरिक्ष में सरल रेखा का समीकरण:** बिंदु `(x1, y1, z1)` से जाने वाली व दिक्-अनुपात `(a, b, c)` वाली रेखा:
`(x - x1) / a = (y - y1) / b = (z - z1) / c` (सदिश रूप: `r = r1 + λb`)।

- दो विषमतलीय रेखाओं (`r = a1 + λb1` व `r = a2 + μb2`) के बीच **न्यूनतम दूरी (Shortest Distance):** `SD = |(a2 - a1) · (b1 × b2)| / |b1 × b2|`।

4. **समतल (Plane) के मानक समीकरण:**
- व्यापक रूप: `Ax + By + Cz + D = 0` (जहाँ `(A, B, C)` समतल के अभिलंब के दिक्-अनुपात हैं)।
- अंतःखंड रूप: `x / a + y / b + z / c = 1`
- बिंदु `(x1, y1, z1)` से समतल `Ax + By + Cz + D = 0` की लंबवत दूरी:
`d = |Ax1 + By1 + Cz1 + D| / √(A^2 + B^2 + C^2)`।
- रेखा (दिक्-अनुपात `a,b,c`) और समतल (अभिलंब `A,B,C`) के बीच का कोण `θ`:
`sin θ = |aA + bB + cC| / [√(a^2+b^2+c^2) × √(A^2+B^2+C^2)]` (ध्यान दें: रेखा व समतल के बीच `sin θ` आता है!)।

10.3 प्रायिकता (Probability — सप्रतिबंध प्रायिकता, बेज प्रमेय एवं द्विपद बंटन)

1. **प्रायिकता का योग प्रमेय:** `P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)`

• परस्पर अपवर्जी घटनाओं (Mutually Exclusive `A ∩ B = φ`) के लिए: `P(A ∪ B) = P(A) + P(B)`

• स्वतंत्र घटनाओं (Independent Events) के लिए: `P(A ∩ B) = P(A) × P(B)` तथा `P(A ∪ B) = 1 - P(A') × P(B')`।

2. **सप्रतिबंध प्रायिकता (Conditional Probability — `B` घटित होने पर `A` की प्रायिकता):**

`P(A | B) = P(A ∩ B) / P(B)` (जहाँ `P(B) > 0`)।

3. **बेज प्रमेय (Bayes' Theorem):** यदि `E1, E2, ..., En` प्रतिदर्श समष्टि का विभाजन हों और `A` कोई घटना हो, तो:

`P(Ek | A) = [ P(Ek) × P(A | Ek) ] / [ ∑ (i = 1 से n) P(Ei) × P(A | Ei) ]`

4. **बरनौली परीक्षण एवं द्विपद बंटन (Binomial Distribution `B(n, p)`):** यदि किसी परीक्षण में सफलता की प्रायिकता `p` और असफलता की प्रायिकता `q = 1 - p` हो, तो `n` स्वतंत्र प्रयासों में ठीक `r` सफलताएँ मिलने की प्रायिकता:

`P(X = r) = nCr × p^r × q^(n - r)`

• द्विपद बंटन का **माध्य (Mean `μ`)** `= n × p`, **प्रसरण (Variance `σ^2`)** `= n × p × q`, तथा **मानक विचलन (SD `σ`)** `= √(npq)`। (ध्यान दें: द्विपद बंटन में सदैव `माध्य (np) > प्रसरण (npq)` होता है!)।

10.4 सांख्यिकी (Statistics — केंद्रीय प्रवृत्ति, प्रसरण, सहसंबंध एवं समाश्रयण)

1. **केंद्रीय प्रवृत्ति के मापकों में अनुभवजन्य संबंध:** `बहुलक (Mode) = 3 × माध्यिका (Median) - 2 × माध्य (Mean)`

2. **प्रसरण (Variance `σ^2`) एवं मानक विचलन (Standard Deviation `σ`):**

• `σ^2 = (1/N) ∑(xi - x̄)^2 = (∑xi^2 / N) - (x̄)^2` तथा `σ = √(प्रसरण)`।

• **प्रथम `n` प्राकृत संख्याओं का प्रसरण:** `σ^2 = (n^2 - 1) / 12`।

• **मूलबिंदु व पैमाने के परिवर्तन का प्रभाव:** यदि प्रत्येक प्रेक्षण `xi` में `a` जोड़ा/घटाया जाए और `k` से गुणा किया जाए (`yi = k × xi ± a`), तो नया माध्य `ȳ = k × x̄ ± a`, नया मानक विचलन `σ_y = |k| × σ_x`, तथा **नया प्रसरण** `Var(y) = k^2 × Var(x)` होता है (जोड़े या घटाए गए अचर `a` का प्रसरण व मानक विचलन पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता!)।

3. **विचरण गुणांक (Coefficient of Variation):** `CV = (σ / x̄) × 100`

4. **सहसंबंध (`r`) एवं समाश्रयण गुणांक (`b_yx, b_xy`):**

• `r^2 = b_yx × b_xy` (अर्थात `r = ±√(b_yx × b_xy)`, जहाँ `r, b_yx, b_xy` तीनों के चिह्न सदैव समान होते हैं तथा `-1 ≤ r ≤ 1`)।

10.5 हल सहित उदाहरण (Solved Examples)

अभ्यास प्रश्न #100 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 10.1: सदिश `a = 2i + 3j + 6k` का सदिश `b = i + 2j + 2k` पर प्रक्षेप (Projection) ज्ञात कीजिए।

हल:

प्रक्षेप `= (a · b) / |b| = [ (2×1) + (3×2) + (6×2) ] / √(1^2 + 2^2 + 2^2) = (2 + 6 + 12) / √9 = 20 / 3`।

अभ्यास प्रश्न #101 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 10.2: यदि कोई रेखा निर्देशांक अक्षों X, Y, Z के साथ क्रमशः $60°, 45°$ तथा θ ($\theta < 90°$) कोण बनाती है, तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

सूत्र $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$ से:

$\cos^2(60°) + \cos^2(45°) + \cos^2(\theta) = 1 \Rightarrow 1/4 + 1/2 + \cos^2(\theta) = 1 \Rightarrow \cos^2(\theta) = 1/4 \Rightarrow \cos\theta = 1/2 \Rightarrow \theta = 60°$।

अभ्यास प्रश्न #102 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 10.3: यदि A और B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं जहाँ $P(A) = 0.3$ और $P(B) = 0.6$ है, तो कम-से-कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता $P(A \cup B)$ ज्ञात कीजिए।

हल:

स्वतंत्र घटनाओं के लिए: $P(A \cup B) = 1 - P(A') \times P(B') = 1 - (1 - 0.3) \times (1 - 0.6) = 1 - (0.7 \times 0.4) = 1 - 0.28 = 0.72$।

अभ्यास प्रश्न #103 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 10.4: एक द्विपद बंटन का माध्य 4 और प्रसरण 3 है। परीक्षणों की कुल संख्या n तथा $P(X = 0)$ ज्ञात कीजिए।

हल:

दिया है: $np = 4$ तथा $npq = 3$। भाग देने पर $q = 3/4 \Rightarrow p = 1 - 3/4 = 1/4$।

अब $n \times (1/4) = 4 \Rightarrow n = 16$। अतः $P(X = 0) = {}^{16}C_0 \times p^0 \times q^{16} = (3/4)^{16}$।

अभ्यास प्रश्न #104 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण 10.5: यदि किसी आँकड़े के प्रत्येक प्रेक्षण को 3 से गुणा करके उसमें 5 जोड़ दिया जाए और पुराने आँकड़ों का प्रसरण 8 हो, तो नए आँकड़ों का प्रसरण क्या होगा?

हल:

सूत्र $\text{Var}(kX + a) = k^2 \times \text{Var}(X)$ से ($+5$ का कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा):

नया प्रसरण $= 3^2 \times 8 = 9 \times 8 = 72$।

10.6 विगत वर्षों के प्रश्न (PYQs — हल सहित)

अभ्यास प्रश्न #105 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 1 [UPSC NDA 2024]: यदि $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ तथा $|\vec{a} \times \vec{b}| = 6$ हो, तो $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ का मान क्या है?

(A) 108 (B) 100 (C) 72 (D) 36

हल (A): लैग्रेंज सर्वसमिका $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$ से:

$6^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 3^2 \times 4^2 = 9 \times 16 = 144 \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 144 - 36 = 108$।

अभ्यास प्रश्न #106 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 2 [UPSC NDA 2025]: एक समतल निर्देशांक अक्षों को क्रमशः $A(3, 0, 0), B(0, 6, 0)$ तथा $C(0, 0, 9)$ पर काटता है। त्रिभुज ABC के केंद्रक से जाने वाले उस समतल का समीकरण क्या है?

(A) $2x + y + 3z = 6$ (B) $6x + 3y + 2z = 18$ (C) $x + 2y + 3z = 9$ (D) $3x + 2y + z = 18$

हल (B): अंतःखंड सूत्र से: $x/3 + y/6 + z/9 = 1 \Rightarrow 6x + 3y + 2z = 18$।

अभ्यास प्रश्न #107 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 3 [CUET UG 2024]: एक निष्पक्ष पासे को 6 बार उछाला जाता है। यदि सम संख्या आने को सफलता माना जाए, तो कम-से-कम 5 सफलताएँ मिलने की प्रायिकता क्या है?

(A) 7 / 64 (B) 1 / 64 (C) 3 / 32 (D) 5 / 64

हल (A): यहाँ n = 6, p = 1/2, q = 1/2।

P(X ≥ 5) = P(X = 5) + P(X = 6) = 6C5 (1/2)^6 + 6C6 (1/2)^6 = (6 + 1) / 64 = 7 / 64।

अभ्यास प्रश्न #108 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 4 [Airforce X-Group 2024]: प्रथम 11 प्राकृत संख्याओं का प्रसरण (Variance) क्या है?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 15

हल (A): सूत्र (n^2 - 1) / 12 में n = 11 रखने पर: (121 - 1) / 12 = 120 / 12 = 10।

अभ्यास प्रश्न #109 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 5 [TGT/PGT Maths 2023]: यदि दो समाश्रयण रेखाएँ 8x - 10y + 66 = 0 तथा 40x - 18y = 214 हों, तो x तथा y के माध्य (x̄, ȳ) क्या होंगे?

(A) (13, 17) (B) (17, 13) (C) (11, 15) (D) (15, 11)

हल (A): दोनों समाश्रयण रेखाओं का प्रतिच्छेदन बिंदु ही (x̄, ȳ) होता है। समीकरण 8x - 10y = -66 को 5 से गुणा कर दूसरे समीकरण 40x - 18y = 214 में से घटाने पर 32y = 544 ⇒ ȳ = 17 तथा x̄ = 13।

अभ्यास प्रश्न #110 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 6 [UPSC NDA 2023]: एक थैले A में 3 लाल और 4 काली गेंदें हैं तथा थैले B में 4 लाल और 5 काली गेंदें हैं। यादृच्छया एक थैला चुनकर उसमें से एक गेंद निकाली जाती है जो लाल पाई जाती है। इसके थैले B से निकाले जाने की प्रायिकता क्या है?

(A) 28 / 55 (B) 27 / 55 (C) 4 / 9 (D) 3 / 7

हल (A): बेज प्रमेय से: P(A) = P(B) = 1/2, P(R|A) = 3/7 तथा P(R|B) = 4/9।

अतः P(B|R) = (4/9) / (3/7 + 4/9) = (4/9) / [(27 + 28) / 63] = 28 / 55।

परीक्षोपयोगी अंतिम मास्टर रिवीजन एवं 20-सेकंड फॉर्मूला चेकलिस्ट (IUC Academy Final Revision Booster)

1. **तुल्यता संबंधों की बेल संख्याएँ (Bell Numbers):** n = 1 ⇒ 1, n = 2 ⇒ 2, n = 3 ⇒ 5, n = 4 ⇒ 15, n = 5 ⇒ 52।
2. **सम्मिश्र सर्वसमिकाएँ:** (1 + i)/(1 - i) = i, (1 - i)/(1 + i) = -i, 1 + ω + ω^2 = 0, ω^3 = 1।
3. **श्रेणी एवं माध्य:** AM ≥ GM ≥ HM, G^2 = A × H, ∑n = n(n+1)/2, ∑n^2 = n(n+1)(2n+1)/6, ∑n^3 = [n(n+1)/2]^2।
4. **आव्यूह एवं सारणिक (n × n):** |kA| = k^n |A|, |adj A| = |A|^(n-1), |adj(adj A)| = |A|^((n-1)^2), ∑λ_i = tr(A), ∏λ_i = |A|।
5. **त्रिकोणमिति सर्वसमिकाएँ:** sin θ sin(60°-θ) sin(60°+θ) = (1/4)sin 3θ, समबाहु त्रिभुज में r : R : r1 = 1 : 2 : 3।
6. **शांकव उत्केंद्रता:** वृत्त (e = 0), परवलय (e = 1), दीर्घवृत्त (e = √(1 - b^2/a^2) < 1), अतिपरवलय (e = √(1 + b^2/a^2) > 1), समकोणीय अतिपरवलय (e = √2)।

7. **कलन (Calculus) के महारथी सूत्र:** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos ax}{x^2} = \frac{a^2}{2}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$, $\int_a^b \frac{f(x)}{f(x)+f(a+b-x)}\,dx = \frac{b-a}{2}$।

8. **सदिश, 3D एवं प्रायिकता:** $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 + (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$, **बहुलक = 3(माध्यिका) - 2(माध्य)**, द्विपद बंटन में **माध्य = np** तथा **प्रसरण = npq**।

प्रकाशक: IUC Academy (Inclusive Universal Careers Academy) — निःशुल्क एवं गुणवत्तापूर्ण प्रतियोगी परीक्षा तैयारी मंच (**www.iucacademy.com**)।

यह खंड ncert.nic.in के कक्षा 11वीं एवं 12वीं के उच्चतर गणित पाठ्यक्रम तथा upsc.gov.in द्वारा आयोजित NDA/NA, CUET (UG/PG), भारतीय वायुसेना ग्रुप X, नौसेना SSR और TGT/PGT परीक्षाओं के नवीनतम मानकों के अनुरूप तैयार किया गया है।

मॉड्यूल 1: समुच्चय सिद्धांत, संबंध, फलन एवं सम्मिश्र संख्याएं (Sets, Relations, Functions & Complex Numbers)

अध्याय के प्रमुख अध्ययन स्तंभ — मॉड्यूल 1: समुच्चय सिद्धांत, संबंध, फलन एवं सम्मिश्र संख्याएं (Sets, Relations, Functions & Complex Numbers)

प्रमुख अध्ययन बिंदु 1	प्रमुख अध्ययन बिंदु 2	प्रमुख अध्ययन बिंदु 3
विस्तृत तुलनात्मक एवं महत्वपूर्ण सूत्र सारणी (Comparative & Formula Table)	क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)	परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)

1.1 प्रमुख चरण एवं प्रक्रिया प्रवाह

चरण 1 समुच्चय एवं कार्टेशियन गुणन (Set & A x B): n(A) = p, n(B) = q ==> n(A x B) = p * q

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1
`

चरण 2
[नोड 2: संबंध एवं तुल्यता परीक्षण (Relations)] कुल संबंध = 2^(p*q); स्वतुल्य (Reflexive) + सममित (Symmetric) + संक्रामक (Transitive) = तुल्यता संबंध (Equivalence Relation)`

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1
`

चरण 2
[नोड 3: फलन एवं प्रतिलोम अस्तित्व (Functions & Bijection)] एकैकी (One-One / Injective) + आच्छादक (Onto / Surjective) = एकैकी-आच्छादक (Bijective)
<

चरण 3
f^-1 विद्यमान`

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1
`

चरण 2
[नोड 4: सम्मिश्र तल एवं यूलर रूप (Complex Plane & De Moivre)] z = x + iy = r(cos(theta) + isin(theta)) = re^(i*theta)

चरण 3
z^n = r^n (cos(ntheta) + isin(ntheta))`

1.2 विस्तृत तुलनात्मक एवं महत्वपूर्ण सूत्र सारणी (Comparative & Formula Table)

क्र.सं.	संकल्पना / उप-विषय	1D मानक गणितीय सूत्र (1D Formula)	मुख्य शर्त / डोमेन एवं परास	परीक्षा अनुप्रयोग (NDA / CUET / TGT)	आधिकारिक संदर्भ
1	दो समुच्चयों का संघ (Union of Two Sets)	`n(A U B) = n(A) + n(B) - n(A Intersection B)`	यदि A और B असंयुक्त हैं, तो `n(A Intersection B) = 0`	वेन आरेख एवं शब्द समस्याएं	ncert.nic.in
2	तीन समुच्चयों का संघ (Union of Three Sets)	`n(A U B U C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A Int B) - n(B Int C) - n(C Int A) + n(A Int B Int C)`	केवल एक में अवयव: `n(A) - n(A Int B) - n(A Int C) + n(A Int B Int C)`	प्रतिशत एवं सर्वेक्षण प्रश्न	upsc.gov.in
3	डी-मॉर्गन के नियम (De Morgan's Laws)	`(A U B)' = A' Intersection B'` तथा `(A Intersection B)' = A' U B'`	सार्वत्रिक समुच्चय U के सापेक्ष पूरक	समुच्चय बीजगणित सरलीकरण	ncert.nic.in
4	समुच्चय A पर विशेष संबंधों की संख्या	`स्वतुल्य = 2^(n(n-1))`, `सममित = 2^(n (n+1)/2)`, `स्वतुल्य एवं सममित = 2^(n*(n-1)/2)`	जहां `n(A) = n` है	सीधा गणनात्मक MCQ	www.iucacademy.com
5	फलनों की कुल संख्या (Total Functions A to B)	`कुल फलन = q^p`, `एकैकी (One-One) = q! / (q - p)!` (जब `q >= p`)	जहां `n(A) = p` और `n(B) = q`; यदि `p > q` तो एकैकी = 0	क्रमचय आधारित फलन गणना	ncert.nic.in
6	आच्छादक एवं एकैकी-आच्छादक फलन	`आच्छादक (Onto from A to B when n(B)=2) = 2^p - 2`; `Bijective = n!` (जब `p = q = n`)	आच्छादक के लिए `p >= q` आवश्यक	CUET एवं PGT उच्च स्तरीय प्रश्न	www.iucacademy.com

क्र.सं.	संकल्पना / उप-विषय	1D मानक गणितीय सूत्र (1D Formula)	मुख्य शर्त / डोमेन एवं परास	परीक्षा अनुप्रयोग (NDA / CUET / TGT)	आधिकारिक संदर्भ
7	आयोटा की घात एवं चक्रण (Powers of i)	`i = sqrt(-1)`, `i^2 = -1`, `i^3 = -i`, `i^4 = 1`, `i^n + i^(n+1) + i^(n+2) + i^(n+3) = 0`	क्रमागत 4 घातों का योग सदैव शून्य	बड़ी घातों का त्वरित मान	ncert.nic.in
8	मापांक एवं संयुग्मी गुणधर्म (Modulus & Conjugate)	`	z	= sqrt(x^2 + y^2), z * z_bar =	z	^2, z^-1 = z_bar /	z	^2`	`	z1 * z2	=
9	त्रिभुज असमिका (Triangle Inequality)	`		z1	-	z2		<=	z1 + z2	<=	z1
10	इकाई के घनमूल (Cube Roots of Unity)	`1, omega, omega^2`; `1 + omega + omega^2 = 0` तथा `omega^3 = 1`	`omega = (-1 + i*sqrt(3))/2`, `omega^2 = (-1 - i sqrt(3))/2`	बीजगणितीय व्यंजक सरलीकरण	www.iucacademy.com
11	सम्मिश्र संख्या का वर्गमूल (Square Root of z)	`sqrt(x + i*y) = +/- [sqrt((	z	+ x)/2) + i *sgn*(*y*) sqrt((	z	- x)/2)]`	जहां `	z	= sqrt(x^2 + y^2) और sgn(y)` चिह्न फलन है	Air Force X एवं Navy SSR	ncert.n

1.3 क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)

क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)

एक परिमित समुच्चय A (जिसमें `n` अवयव हैं) पर परिभाषित किए जा सकने वाले **तुल्यता संबंधों (Equivalence Relations)** की कुल संख्या **बेल संख्या (Bell Number `B_n`)** के बराबर होती है! उदाहरण के लिए, यदि `n = 1` तो `B_1 = 1`; यदि `n = 2` तो `B_2 = 2`; यदि `n = 3` तो `B_3 = 5`; और यदि `n = 4` तो `B_4 = 15` तुल्यता संबंध बनते हैं। इसके अतिरिक्त, सम्मिश्र तल (Argand Plane) में इकाई के घनमूल `1, omega, omega^2` एक ऐसे **समबाहु त्रिभुज (Equilateral Triangle)** के शीर्ष बनाते हैं जिसका केंद्रक मूलबिंदु `(0, 0)` पर होता है और क्षेत्रफल `(3 * sqrt(3)) / 4` वर्ग इकाई होता है (ncert.nic.in)।

1.4 परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)

परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)

1. **वर्गमूल का गलत नियम:** छात्र अक्सर `sqrt(a) sqrt(b) = sqrt(a b)` को सभी वास्तविक संख्याओं के लिए सत्य मान लेते हैं। सावधान रहें! यदि `a < 0` और `b < 0` दोनों ऋणात्मक हों, तो यह सूत्र **गलत** है! उदाहरण: `sqrt(-4) sqrt(-9) = (2i) (3i) = 6 i^2 = -6` होता है, न कि `sqrt((-4) (-9)) = +6`।
2. **प्रमुख कोणांक (Principal Argument) का चतुर्थांश भ्रम:** `arg(z)` निकालते समय केवल `tan^-1(y/x)` लिखकर न छोड़ें। मुख्य मान सदैव `(-pi, pi]` अंतराल में होता है: प्रथम चतुर्थांश में `alpha`, द्वितीय में `pi - alpha`, तृतीय में `-(pi - alpha)` और चतुर्थ में `-alpha` होता है (जहां `alpha = tan^-1(|y/x|)`)।
3. **संयुग्मी असमिका भ्रम:** सम्मिश्र संख्याओं के बीच कभी भी `<` या `>` (बड़ा या छोटा) का संबंध परिभाषित नहीं होता! `3 + 4i > 1 + 2i` पूर्णतः अर्थहीन कथन है; केवल उनके मापांक `|z1| > |z2|` की तुलना की जा सकती है (upsc.gov.in)।

1.5 IUC स्मृति ट्रिक (IUC 5-Second Shortcut Trick)

• **ट्रिक 1 (आर्गंड तल में ज्यामितीय बिंदुपथ पहचान):**

• यदि `|(z - z1) / (z - z2)| = 1` हो, तो `z` का बिंदुपथ `z1` और `z2` को मिलाने वाले रेखाखंड का **लंब समद्विभाजक (Perpendicular Bisector)** होता है।

• यदि `|(z - z1) / (z - z2)| = k` (जहां `k != 1, k > 0`) हो, तो बिंदुपथ सदैव एक **वृत्त (Apollonius Circle)** होता है।

• यदि `|z - z1| + |z - z2| = k` हो: जब `k > |z1 - z2|` तो **दीर्घवृत्त (Ellipse)**; जब `k = |z1 - z2|` तो **रेखाखंड (Line Segment)**।

• **ट्रिक 2 (`(1 + i)^n` एवं `(1 - i)/(1 + i)` का 2-सेकंड हल):**

• याद रखें: `(1 + i) / (1 - i) = i` और `(1 - i) / (1 + i) = -i` तथा `(1 + i)^2 = 2i` और `(1 - i)^2 = -2` i।

अभ्यास प्रश्न #1 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण: `((1 + i) / (1 - i))^100 = i^100 = (i^4)^25 = 1^25 = 1` (हल करने का समय: मात्र 2 सेकंड!) (www.iucacademy.com)।

मॉड्यूल 2: द्विघात समीकरण, अनुक्रम-श्रेणी, द्विपद प्रमेय एवं क्रमचय-संचय (Algebra Master Module)

अध्याय के प्रमुख अध्ययन स्तंभ — मॉड्यूल 2: द्विघात समीकरण, अनुक्रम-श्रेणी, द्विपद प्रमेय एवं क्रमचय-संचय (Algebra Master Module)

प्रमुख अध्ययन बिंदु 1	प्रमुख अध्ययन बिंदु 2	प्रमुख अध्ययन बिंदु 3
विस्तृत तुलनात्मक एवं महत्वपूर्ण सूत्र सारणी (Comparative & Formula Table)	क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)	परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)

2.1 प्रमुख चरण एवं प्रक्रिया प्रवाह

चरण 1 द्विघात समीकरण एवं मूल विश्लेषण: `ax^2 + bx + c = 0 (a != 0) ==> D = b^2 - 4ac; alpha + beta = -b/a, alpha * beta = c/a`

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1	चरण 2	चरण 3
` `	[नोड 2: श्रेणी संबंध (AP, GP, HP)] AM = (a+b)/2, GM = sqrt(ab), HM = 2a*b/(a+b)	G^2 = A * H तथा AM >= GM >= HM`

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1

`

चरण 2

[नोड 3: द्विपद प्रसार (Binomial Expansion)] (x + a)^n = Sum_{r=0 to n} [nCr *x*^(*n-r*) a^r]; व्यापक पद T_(r+1) = nCr *x*^(*n-r*) a^r`

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1

`

चरण 2

[नोड 4: गणना के सिद्धांत (P&C)] चयन (Selection) = nCr = n! / (r! *(n-r)*!); व्यवस्था (*Arrangement*) = *nPr* = *r*! nCr`

2.2 विस्तृत तुलनात्मक एवं महत्वपूर्ण सूत्र सारणी (Comparative & Formula Table)

क्र.सं.	विषय / प्रमेय	1D मानक गणितीय सूत्र (1D Formula)	मुख्य गुणधर्म / शर्त	परीक्षा उपयोगिता	आधिकारिक संदर्भ			
1	मूलों का अंतर (Difference of Roots)	`	alpha - beta	= sqrt((alpha + beta)^2 - 4*alpha*beta) = sqrt(D) /	a	`	जहां D = b^2 - 4*ac* विविक्तकर है	ज मू क अं दि हो
2	सममित मूल घातांक (Symmetric Power Sums)	alpha^2 + beta^2 = (alpha+beta)^2 - 2*alpha*beta ; alpha^3 + beta^3 = (alpha+beta)^3 - 3*alpha*beta*(alpha+beta)	बिना मूल निकाले सीधा मान	NDA एवं Air Force X	upsc.gov.in			
3	उभयनिष्ठ मूल की शर्त (Common Root Condition)	एक मूल उभयनिष्ठ: (c1*a*2 - *c*2a1)^2 = (b1*c*2 - *b*2c1)(*a*1b2 - a2*b1)	दोनों मूल उभयनिष्ठ: a1/a2 = b1/b2 = c1/c2	TGT/PGT एवं NDA बीजगणित	www.iucacademy.com			
4	समांतर श्रेणी (AP) का nवां पद एवं योग	T_n = a + (n - 1)*d* ; *S_n* = (*n*/2) [2*a* + (*n* - 1)d] = (n/2)*(a + l)	T_n = S_n - S_(n-1) (जब n >= 2)	श्रेणी योग एवं पद पहचान	ncert.nic.in			
5	गुणोत्तर श्रेणी (GP) एवं अनंत GP योग	T_n = a *r*^(*n*-1) ; *S_n* = *a* (1 - r^n)/(1 - r); S_infinity = a / (1 - r)	अनंत योग के लिए `	r	< 1` अनिवार्य है	आवर्त दशमलव एवं श्रेणी	ncert.nic.in	
6	प्राकृत संख्याओं के घातों का योग	Sum(n) = n(*n*+1)/2 ; *Sum*(*n*^2) = *n* (n+1)(2n+1)/6; Sum(n^3) = [n*(n+1)/2]^2	प्रथम n प्राकृत संख्याओं के लिए	विशेष श्रेणियों का योग	upsc.gov.in			
7	द्विपद गुणांकों के योग नियम	nC0 + nC1 + ... + nCn = 2^n ; nC0 + nC2 + nC4 + ... = nC1 + nC3 + ... = 2^(n-1)	सम एवं विषम स्थान के गुणांकों का योग बराबर	द्विपद गुणांक सर्वसमिकाएं	ncert.nic.in			

क्र.सं.	विषय / प्रमेय	1D मानक गणितीय सूत्र (1D Formula)	मुख्य गुणधर्म / शर्त	परीक्षा उपयोगिता	आधिकारिक संदर्भ
8	बहुपद प्रमेय (Multinomial Theorem)	(x1 + x2 + ... + xk)^n में कुल पदों की संख्या = (n + k - 1) C (k - 1)	जैसे (a + b + c)^n में कुल पद = (n+1)*(n+2)/2	पदों की संख्या गिनना	www.iucacademy.com
9	वृत्तीय क्रमचय (Circular Permutation)	भिन्न वस्तुएं (दिशा भिन्न): (n - 1)! ; माला या हार (दिशा समान): (n - 1)! / 2	मेज के चारों ओर बैठना बनाम मोतियों की माला	क्रमचय शब्द समस्याएं	ncert.nic.in
10	विस्थापन सूत्र (Derangement Formula)	D_n = n! * [1 - 1/1! + 1/2! - 1/3! + ... + (-1)^n / n!]	D_2 = 1, D_3 = 2, D_4 = 9, D_5 = 44	पत्रों को गलत लिफाफों में डालना	upsc.gov.in

2.3 क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)

क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)
यदि किसी द्विघात समीकरण ax^2 + bx + c = 0 में गुणांकों का योग शून्य हो (अर्थात् a + b + c = 0), तो बिना किसी गणना के उसके दो मूल सदैव 1 और c/a होते हैं! इसी प्रकार यदि a - b + c = 0 हो, तो उसके मूल सदैव -1 और -c/a होते हैं। साथ ही, पास्कल त्रिभुज (Pascal's Triangle) की प्रत्येक पंक्ति के अवयवों को यदि 11 की घात के रूप में देखा जाए (11^0 = 1, 11^1 = 11, 11^2 = 121, 11^3 = 1331, 11^4 = 14641), तो वे सीधे nCr के मान देते हैं (ncert.nic.in)।

2.4 परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)

परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)
1. **AP के योग से सार्वअंतर निकालने में त्रुटि:** यदि S_n = Pn^2 + Qn दिया हो, तो छात्र T_1, T_2 निकालकर समय गंवाते हैं या सार्वअंतर d = P लिख देते हैं। सतर्क रहें: सार्वअंतर सदैव n^2 के गुणांक का **दोगुना** होता है, अर्थात् * d = 2 P और प्रथम पद a = P + Q** होता है!
2. **द्विपद प्रसार में 'सबसे बड़ा गुणांक' बनाम 'संख्यात्मक रूप से महत्तम पद':** सबसे बड़ा द्विपद गुणांक केवल n पर निर्भर करता है (सम n के लिए nC(n/2)), जबकि संख्यात्मक रूप से महत्तम पद x के मान पर भी निर्भर करता है जिसके लिए r = [(n + 1) * |x|] / (|x| + 1) सूत्र प्रयुक्त होता है।
3. **संचय समीकरण जाल:** यदि nCx = nCy हो, तो केवल x = y लेकर उत्तर न दें; दूसरी मुख्य शर्त x + y = n ही परीक्षा में 90% बार पूछी जाती है (upsc.gov.in)।

2.5 IUC स्मृति ट्रिक (IUC 5-Second Shortcut Trick)

• *ट्रिक 1 (x से स्वतंत्र पद / Constant Term इन (a x^p + b / x^q)^n):**

• लंबा T_(r+1) सूत्र लगाने के बजाय सीधा r निकालें: * r = (np) / (p + q)*। (यदि x^k का गुणांक चाहिए, तो r = (np - k) / (p + q) लगाएं)।

अभ्यास प्रश्न #2 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

उदाहरण: (2x^2 - 3/x^3)^10 में x से स्वतंत्र पद के लिए p = 2, q = 3, n = 10। अतः r = (10 2) / (2 + 3) = 20 / 5 = 4। सीधा उत्तर = T_5 (अर्थात् 5वां पद)!

• ट्रिक 2 (GP में 3 क्रमागत पदों या AP में अनुपात ट्रिक):

• यदि दो समांतर श्रेणियों के n पदों के योगफलों का अनुपात S_n / S'_n = f(n) दिया हो और m वें पदों का अनुपात T_m / T'_m पूछा जाए, तो सूत्र में n के स्थान पर सीधे *(2m - 1)* रख दें! उदाहरण: m = 11 के लिए n = 2(11) - 1 = 21 रखें (www.iucacademy.com)।

मॉड्यूल 3: आव्यूह एवं सारणिक (Matrices & Determinants)

अध्याय के प्रमुख अध्ययन स्तंभ — मॉड्यूल 3: आव्यूह एवं सारणिक (Matrices & Determinants)

प्रमुख अध्ययन बिंदु 1	प्रमुख अध्ययन बिंदु 2	प्रमुख अध्ययन बिंदु 3
विस्तृत तुलनात्मक एवं महत्वपूर्ण सूत्र सारणी (Comparative & Formula Table)	क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)	परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)

3.1 प्रमुख चरण एवं प्रक्रिया प्रवाह

चरण 1 आव्यूह प्रकार एवं बीजगणित: A = [a_ij]_(m x n); सममित (A' = A) + विषम सममित (A' = -A) ==> A = (1/2)(A + A') + (1/2)(A - A')

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1
`

चरण 2
[नोड 2: सारणिक एवं उपसारणिक-सहखंड] |A| = Sum [a_ij C_ij]; जहां सहखंड C_ij = (-1)^(i+j) M_ij`

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1
`

चरण 2
[नोड 3: सहखंडज एवं व्युत्क्रम आव्यूह] adj(A) = [C_ij]^T; A adj(A) = |A| I_n

चरण 3
A^-1 = adj(A) / |A| (जब |A| != 0)`

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1
`

चरण 2
[नोड 4: रैखिक समीकरण निकाय (AX = B)] | A| != 0

चरण 3
अद्वितीय हल (X = A^-1 B); |A| = 0 एवं (adj A)B = 0

चरण 4
अनंत हल; (adj A)*B != 0

चरण 5
कोई हल नहीं`

3.2 विस्तृत तुलनात्मक एवं महत्वपूर्ण सूत्र सारणी (Comparative & Formula Table)

क्र.सं.	गुणधर्म / विशेष आव्यूह	1D मानक गणितीय सूत्र (1D Formula)	कोटि n पर प्रभाव / शर्त	परीक्षा महत्व	आधिकारिक संदर्भ				
1	अदिश गुणन का सारणिक	`	k * A	= k^n *	A	`	जहां A एक n x n कोटि का वर्ग आव्यूह है	NDA/ CUET का सबसे प्रिय प्रश्न	ncert.nic.in

क्र.सं.	गुणधर्म / विशेष आव्यूह	1D मानक गणितीय सूत्र (1D Formula)	कोटि n पर प्रभाव / शर्त	परीक्षा महत्व	आधिकारिक संदर्भ				
2	सहखंडज का सारणिक (Determinant of Adjoint)	`	adj(A)	=	A	^(n - 1) तथा	adj(adj(A))	=	A
3	सहखंडज का सहखंडज (Adjoint of Adjoint)	`adj(adj(A)) =	A	^(n - 2) A तथा adj(kA) = k^(n - 1) * adj(A)`	n >= 2 एवं `	A	!= 0` के लिए वैध	TGT/PGT एवं NDA उच्च प्रश्न	www.iucacademy.com
4	परिवर्त एवं व्युत्क्रम का उत्क्रमण नियम	(A B)^T = B^T A^T तथा (A B)^-1 = B^-1 A^-1	इसी प्रकार adj(A B) = adj(B) adj(A)	कथन-आधारित (Statement) प्रश्न	ncert.nic.in				
5	विषम सममित आव्यूह का सारणिक	विषम कोटि (n = 1, 3, 5...) होने पर `	A	= 0`; सम कोटि होने पर पूर्ण वर्ग	मुख्य विकर्ण के सभी अवयव शून्य (a_ii = 0) होते हैं	बिना प्रसार किए उत्तर 0	ncert.nic.in		
6	लांबिक आव्यूह (Orthogonal Matrix)	A A^T = A^T A = I <==> A^-1 = A^T तथा `	A	= +/- 1`	घूर्णन आव्यूह [cos(t), -sin(t); sin(t), cos(t)] लांबिक है	गुणधर्म पहचान प्रश्न	upsc.gov.in		
7	वर्गसम एवं शून्यभावी आव्यूह	वर्गसम (Idempotent): A^2 = A (`	A	= 0 या 1); शून्यभावी (Nilpotent): A^k = O (	A	= 0`)	अंतर्वलनी (Involutory): A^2 = I <==> A^-1 = A	विशेष आव्यूह वर्गीकरण	www.iucacademy.com
8	आव्यूह का अनुरेख (Trace of Matrix)	tr(A) = Sum_{i=1 to n} a_ii = lambda_1 + lambda_2 + ... + lambda_n	tr(A + B) = tr(A) + tr(B) एवं tr(AB) = tr(BA)	आइगेन मान एवं विकर्ण योग	ncert.nic.in				

क्र.सं.	गुणधर्म / विशेष आव्यूह	1D मानक गणितीय सूत्र (1D Formula)	कोटि n पर प्रभाव / शर्त	परीक्षा महत्व	आधिकारिक संदर्भ		
9	सारणिक से त्रिभुज का क्षेत्रफल	`Area = (1/2) *	x1(y2 - y3) + x2(y3 - y1) + x3*(y1 - y2)	`	सरेख (Collinear) होने की शर्त: Area = 0	निर्देशांक एवं सारणिक संगम	ncert.nic.in
10	क्रैमर का नियम (Cramer's Rule)	x = Delta_1 / Delta, y = Delta_2 / Delta, z = Delta_3 / Delta	समघातीय निकाय (AX = O) में अतुच्छ हल यदि `	A	= 0`	समीकरण निकाय संगतता	upsc.gov.in

3.3 क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)

क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)

कैले-हैमिल्टन प्रमेय (Cayley-Hamilton Theorem) के अनुसार, प्रत्येक वर्ग आव्यूह A अपने स्वयं के अभिलाक्षणिक समीकरण |A - lambda I| = 0 को संतुष्ट करता है! एक 2 x 2 आव्यूह A के लिए अभिलाक्षणिक समीकरण सीधा A^2 - tr(A)A + |A|I = O होता है, और 3 x 3 आव्यूह के लिए A^3 - tr(A)A^2 + (प्रमुख विकर्ण के उपसारणिकों का योग)A - |A|I = O** होता है। इससे A^-1 और A^n बिना लंबे गुणन के तुरंत निकल आते हैं (www.iucacademy.com)।

3.4 परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)

परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)

1. **आव्यूह बनाम सारणिक में अदिश गुणन:** आव्यूह kA में अदिश k आव्यूह के **प्रत्येक अवयव** से गुणा होता है, इसलिए |kA| = k^n |A| होता है (छात्र गलती से k|A| कर देते हैं)। इसके विपरीत, सारणिक में k का गुणा किसी **एक पंक्ति या एक स्तंभ** से ही होता है!
2. **शून्य भाजक (Zero Divisors) का भ्रम:** वास्तविक संख्याओं में यदि ab = 0 हो तो a = 0 या b = 0 आवश्यक है, परंतु आव्यूहों में A != O और B != O होने पर भी AB = O (शून्य आव्यूह)* हो सकता है! साथ ही सामान्यतः AB != BA होने के कारण (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 गलत है; सही सूत्र A^2 + AB + BA + B^2 है (ncert.nic.in)।

3.5 IUC स्मृति ट्रिक (IUC 5-Second Shortcut Trick)

• **ट्रिक 1 (2 x 2 आव्यूह का व्युत्क्रम पलक झपकते निकालना):**

• यदि A = [a, b; c, d] हो, तो मुख्य विकर्ण के अवयवों (a, d) को आपस में बदल दें और दूसरे विकर्ण (b, c) के चिह्न बदल दें: adj(A) = [d, -b; -c, a] और * A^-1 = (1 / (ad - bc)) [d, -b; -c, a]**।

• **ट्रिक 2 (चक्रीय सारणिक मान प्रतिस्थापन ट्रिक):**

• जब सारणिक में a, b, c या x, y, z के जटिल बीजीय व्यंजक हों और विकल्प भी a, b, c में हों, तो सीधे a = 1, b = 2, c = 3 (या x = 0, y = 1, z = 2, बशर्ते हर शून्य न बने) रखकर 5 सेकंड में संख्यात्मक मान निकालें और विकल्पों से मिलान करें (www.iucacademy.com)।

मॉड्यूल 4: त्रिकोणमिति, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन एवं ऊंचाई-दूरी (Trigonometry, ITF & Heights)

अध्याय के प्रमुख अध्ययन स्तंभ — मॉड्यूल 4: त्रिकोणमिति, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन एवं ऊंचाई-दूरी (Trigonometry, ITF & Heights)

प्रमुख अध्ययन बिंदु 1
विस्तृत तुलनात्मक एवं महत्वपूर्ण सूत्र सारणी (Comparative & Formula Table)

प्रमुख अध्ययन बिंदु 2
क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)

प्रमुख अध्ययन बिंदु 3
परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)

4.1 प्रमुख चरण एवं प्रक्रिया प्रवाह

चरण 1 चतुर्थांश ASTC नियम एवं रूपांतरण: All (+ in Q1), Sin/Cosec (+ in Q2), Tan/Cot (+ in Q3), Cos/Sec (+ in Q4); C+D एवं A+B सूत्र

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1
`

चरण 2
[नोड 2: चरम मान एवं आवर्तकाल (Extrema & Period)] a*sin(x) + bcos(x) in [-sqrt(a^2+b^2), +sqrt(a^2+b^2)]; Period of sin(ax) = 2pi/|a|`

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1
`

चरण 2
[नोड 3: प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन (ITF)] sin^-1(x) + cos^-1(x) = pi/2; tan^-1(x) + tan^-1(y) = tan^-1((x+y)/(1-xy)) (जब xy < 1)`

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1
`

चरण 2
[नोड 4: त्रिभुज के गुण एवं ऊंचाई-दूरी] Sine Rule: a/sin(A) = 2*R; Cosine Rule; h = d / (cot(alpha) - cot(beta))`

4.2 विस्तृत तुलनात्मक एवं महत्वपूर्ण सूत्र सारणी (Comparative & Formula Table)

क्र.सं.	त्रिकोणमितीय संकल्पना	1D मानक गणितीय सूत्र (1D Formula)	मुख्य शाखा / डोमेन शर्त	परीक्षा अनुप्रयोग	आधिकारिक संदर्भ
1	योग एवं अंतर से गुणन (C & D Formulas)	`sin(C) + sin(D) = 2sin((C+D)/2)cos((C-D)/2)` ; `cos(C) - cos(D) = -2sin((C+D)/2)sin((C-D)/2)`	`cos(C) + cos(D) = 2cos((C+D)/2)cos((C-D)/2)`	अनुपात एवं समीकरण हल	ncert.nic.in
2	त्रिकोणमितीय गुणन श्रृंखला (60 डिग्री नियम)	`sin(theta) sin(60 - theta) sin(60 + theta) = (1/4) sin(3theta)`	`cos` के लिए `(1/4)cos(3theta)` ; `tan` के लिए `tan(3*theta)`	`sin(20)sin(40)sin(80) = sqrt(3)/8`	upsc.gov.in
3	अर्ध-कोण स्पर्शज्या सूत्र (Half-Angle Tan Rules)	`sin(2x) = 2tan(x)/(1 + tan^2(x))` ; `cos(2*x) = (1 - tan^2(x))/(1 + tan^2(x))`	सार्वत्रिक प्रतिस्थापन `t = tan(x/2)`	समाकलन एवं प्रतिलोम फलन	ncert.nic.in
4	`15°`, `18°`, `36°` एवं `22.5°` के मानक मान	`sin(15°) = cos(75°) = (sqrt(3)-1)/(2*sqrt(2))` ; `sin(18°) = (sqrt(5)-1)/4` ; `cos(36°) = (sqrt(5)+1)/4`	`tan(15°) = 2 - sqrt(3)` ; `tan(22.5°) = sqrt(2) - 1`	सीधा मान प्रतिस्थापन	www.iucacademy.com
5	प्रतिलोम फलन मुख्य मान शाखाएं	`sin^-1, cosec^-1, tan^-1` का परिसर `[-pi/2, pi/2]` (अवयव रहित बिंदु छोड़कर)	`cos^-1, sec^-1, cot^-1` का परिसर `[0, pi]`	CUET एवं बोर्ड/NDA अनिवार्य प्रश्न	ncert.nic.in

क्र.सं.	त्रिकोणमितीय संकल्पना	1D मानक गणितीय सूत्र (1D Formula)	मुख्य शाखा / डोमेन शर्त	परीक्षा अनुप्रयोग	आधिकारिक संदर्भ				
6	पूरक प्रतिलोम सर्वसमिकाएं	`sin^-1(x) + cos^-1(x) = pi/2`; `tan^-1(x) + cot^-1(x) = pi/2`; `sec^-1(x) + cosec^-1(x) = pi/2`	क्रमशः `	x	<= 1`, `x in R`, तथा	x	>= 1` के लिए	अवकलन एवं समीकरण हल	ncert.n
7	कोज्या एवं ज्या नियम (Sine & Cosine Rules)	`a/sin(A) = b/sin(B) = c/sin(C) = 2R`; `cos(A) = (b^2 + c^2 - a^2) / (2 b*c)`	जहां `R` परिवृत्त की त्रिज्या है	त्रिभुज के गुण (SOT)	upsc.gov.in				
8	हीरोन, अंत:त्रिज्या (`r`) एवं परित्रिज्या (`R`)	`Delta = sqrt(s(s-a)(s-b)(s-c))`; `r = Delta / s`; `R = (a bc) / (4Delta)`	समबाहु त्रिभुज में `R : r = 2 : 1`	ज्यामितीय त्रिकोणमिति	www.iucacademy.com				
9	दो बिंदुओं से मीनार का उन्नयन कोण सूत्र	`h = d / (cot(alpha) - cot(beta))` (एक ही ओर); `h = d / (cot(alpha) + cot(beta))` (विपरीत ओर)	जहां `alpha < beta` और `d` दोनों बिंदुओं के बीच की दूरी है	ऊंचाई एवं दूरी (Height & Distance)	upsc.gov.in				
10	व्यापक त्रिकोणमितीय समीकरण हल	`sin(x) = sin(alpha) ==> x = npi + (-1)^n alpha`; `cos(x) = cos(alpha) ==> x = 2npi +/- alpha`	`tan(x) = tan(alpha) ==> x = n*pi + alpha` (`n in Z`)	व्यापक हल पहचान	ncert.nic.in				

4.3 क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)

क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)
यदि किसी त्रिभुज या समीकरण में A + B + C = pi (अर्थात् 180°) हो, तो * tan(A) + tan(B) + tan(C) = tan(A) tan(B) tan(C) तथा cot(A) cot(B) + cot(B) cot(C) + cot(C) cot(A) = 1 होता है! इसी प्रकार यदि A + B = pi/4 (अर्थात् 45°) हो, तो सदैव (1 + tan(A)) (1 + tan(B)) = 2 होता है। इस एक नियम से (1 + tan(1°)) (1 + tan(44°)) = 2 जैसे जटिल दिखने वाले गुणनफल 2 सेकंड में हल हो जाते हैं (www.iucacademy.com)।

4.4 परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)

परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)
1. * tan^-1(x) + tan^-1(y) में x y > 1 का जाल:* जब x > 0, y > 0 और उनका गुणनफल x y > 1 हो, तो सामान्य सूत्र tan^-1((x+y)/(1-xy)) ऋणात्मक कोण दे देता है जो गलत है! सही सूत्र pi + tan^-1((x + y) / (1 - x y))* है। उदाहरण: tan^-1(2) + tan^-1(3) = pi + tan^-1(-1) = pi - pi/4 = 3 pi/4 (न कि -pi/4)!
2. sin^-1(sin(x)) = x **का अंधाधुंध प्रयोग:** यह केवल तभी सत्य है जब x in [-pi/2, pi/2] हो! यदि x = 2pi/3 हो, तो sin^-1(sin(2 pi/3)) = pi - 2*pi/3 = pi/3 होगा (ncert.nic.in)।

4.5 IUC स्मृति ट्रिक (IUC 5-Second Shortcut Trick)

- **ट्रिक 1 (व्युत्क्रम फलनों का न्यूनतम मान — AM-GM ट्रिक):**
- a^2 tan^2(x) + b^2 cot^2(x) का न्यूनतम मान सदैव * 2 ab* होता है।
- परंतु a^2 sec^2(x) + b^2 cosec^2(x) का न्यूनतम मान सदैव (a + b)^2 होता है, और a^2 sin^2(x) + b^2 cosec^2(x) में यदि a >= b हो तो न्यूनतम मान 2ab है, किंतु यदि a < b हो तो न्यूनतम मान a^2 + b^2 होता है (क्योंकि sin^2(x) <= 1 है)!
- **ट्रिक 2 (30°-60°-90° अनुपात से ऊंचाई-दूरी):**
- 30° के सामने 1 इकाई, 60° के सामने sqrt(3) इकाई और 90° के सामने 2 इकाई रखें। यदि उन्नयन कोण 30° से 60° होने पर व्यक्ति d मीटर चलता है, तो मीनार की ऊंचाई सीधे * h = (d sqrt(3)) / 2** होती है (www.iucacademy.com)।

मॉड्यूल 5: द्विविमीय निर्देशांक ज्यामिति एवं शांकव परिच्छेद (2D Coordinate Geometry & Conic Sections)

अध्याय के प्रमुख अध्ययन स्तंभ — मॉड्यूल 5: द्विविमीय निर्देशांक ज्यामिति एवं शांकव परिच्छेद (2D Coordinate Geometry & Conic Sections)

प्रमुख अध्ययन बिंदु 1	प्रमुख अध्ययन बिंदु 2	प्रमुख अध्ययन बिंदु 3
विस्तृत तुलनात्मक एवं महत्वपूर्ण सूत्र सारणी (Comparative & Formula Table)	क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)	परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)

5.1 प्रमुख चरण एवं प्रक्रिया प्रवाह

चरण 1 **बिंदु एवं त्रिभुज के केंद्र:** केंद्रक G = ((x1+x2+x3)/3, (y1+y2+y3)/3); अंतःकेंद्र I; O, G, H संरेख एवं HG : GO = 2 : 1

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1

`

चरण 2

[नोड 2: सरल रेखा (Straight Line)] प्रवणता m = tan(theta); दूरी d = |ax1 + by1 + c| / sqrt(a^2 + b^2); प्रतिबिंब एवं पाद सूत्र`

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1

`

चरण 2

[नोड 3: वृत्त एवं स्पर्श रेखा (Circle)] x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0; केंद्र (-g, -f), त्रिज्या R = sqrt(g^2 + f^2 - c)`

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1

`

चरण 2

[नोड 4: शांकव परिच्छेद (Conics: e)] परवलय (e = 1, y^2 = 4ax); दीर्घवृत्त (e < 1, x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1); अतिपरवलय (e > 1, x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1)`

5.2 विस्तृत तुलनात्मक एवं महत्वपूर्ण सूत्र सारणी (Comparative & Formula Table)

क्र.सं.	ज्यामितीय आकृति / गुणधर्म	1D मानक गणितीय सूत्र (1D Formula)	उत्केंद्रता (e) / विशेष शर्त	नाभिलंब (Latus Rectum) / नाभि	आधिकारिक संदर्भ
1	बिंदु (x1, y1) से रेखा ax + by + c = 0 पर लंब पाद व प्रतिबिंब	(x - x1)/a = (y - y1)/b = -k (ax1 + b*y1 + c) / (a^2 + b^2)	लंब पाद के लिए k = 1; दर्पण प्रतिबिंब (Image) के लिए k = 2	2D एवं 3D दोनों में सर्वाधिक उपयोगी	ncert.nic.in
2	दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी	`d = | c1 - c2 | / sqrt(a^2 + b^2)`	दोनों समीकरणों में x और y के गुणांक समान होने चाहिए	वर्ग की भुजा या वृत्त का व्यास	ncert.nic.in
3	रेखा युग्म ax^2 + 2hxy + b*y^2 = 0 के बीच का कोण	`tan(theta) = 2 sqrt(h^2 - ab) / | a + b |`	`	समांतर/संपाती: h^2 = a*b; लंबवत: a + b = 0	TGT/PGT एवं NDA	upsc.gov.in
4	वृत्त के अक्षों पर कटे अंत:खंड एवं स्पर्श रेखा	X-अंत:खंड = 2sqrt(g^2 - c); Y-अंत:खंड = 2 sqrt(f^2 - c)	y = mx + c वृत्त x^2 + y^2 = r^2 को स्पर्श करेगी यदि c = +/- r sqrt(1 + m^2)	स्पर्श एवं जीवा की लंबाई	ncert.nic.in
5	मानक परवलय (Parabola y^2 = 4ax)	शीर्ष (0, 0), नियता x = -a, अक्ष y = 0	e = 1; प्राचलिक बिंदु (at^2, 2a*t)	नाभि (a, 0), नाभिलंब = 4*a	ncert.nic.in

क्र.सं.	ज्यामितीय आकृति / गुणधर्म	1D मानक गणितीय सूत्र (1D Formula)	उत्केंद्रता (e) / विशेष शर्त	नाभिलंब (Latus Rectum) / नाभि	आधिकारिक संदर्भ
6	मानक दीर्घवृत्त (Ellipse `x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1`, `a > b`)	`b^2 = a^2 * (1 - e^2)` ==> `e = sqrt(1 - b^2/a^2)`	`0 < e < 1`; नाभीय दूरियों का योग `SP + S'P = 2*a`	नाभियां `(+/- ae, 0)`, `LR = 2 b^2 / a`	upsc.gov.in
7	मानक अतिपरवलय (Hyperbola `x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1`)	`b^2 = a^2 * (e^2 - 1)` ==> `e = sqrt(1 + b^2/a^2)`	`e > 1`; नाभीय दूरियों का अंतर `	SP - S'P	= 2*a`	नाभियां `(+/- ae, 0)`, `LR = 2 b^2 / a`	ncert.nic.in
8	आयताकार अतिपरवलय (Rectangular Hyperbola)	`x^2 - y^2 = a^2` अथवा `x * y = c^2`	`a = b`, उत्केंद्रता सदैव `e = sqrt(2)`	अनंतस्पर्शियां परस्पर लंबवत	www.iucacademy.com
9	अतिपरवलय एवं संयुग्मी अतिपरवलय संबंध	`1 / e1^2 + 1 / e2^2 = 1`	जहां `e1` और `e2` अतिपरवलय व संयुग्मी अतिपरवलय की उत्केंद्रताएं हैं	NDA/TGT का डायरेक्ट वन-लाइनर	upsc.gov.in
10	नियामक वृत्त (Director Circle)	दीर्घवृत्त के लिए: `x^2 + y^2 = a^2 + b^2`; अतिपरवलय: `x^2 + y^2 = a^2 - b^2`	दो लंबवत स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदु का बिंदुपथ (परवलय के लिए: नियता)	उच्च स्तरीय शांकव प्रश्न	www.iucacademy.com

5.3 क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)

क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)
किसी भी त्रिभुज में **परिकेंद्र (O), केंद्रक (G) और लंबकेंद्र (H)** सदैव एक ही सीधी रेखा में होते हैं जिसे **यूलर रेखा (Euler Line)** कहा जाता है, और केंद्रक `G`, लंबकेंद्र `H` तथा परिकेंद्र `O` को मिलाने वाले रेखाखंड को सदैव `2 : 1` **के अनुपात (`HG : GO = 2 : 1`)** में अंतःविभाजित करता है! साथ ही, समकोण त्रिभुज में लंबकेंद्र (`H`) समकोण बनाने वाले शीर्ष पर और परिकेंद्र (`O`) कर्ण के मध्य-बिंदु पर स्थित होता है (ncert.nic.in)।

5.4 परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)

परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)
1. **वृत्त की त्रिज्या और समांतर रेखाओं में गुणांक की भूल:** यदि वृत्त का समीकरण `3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y - 15 = 0` दिया हो, तो सीधे `g = -3, f = 6` न लें! पहले पूरे समीकरण को `3` **से भाग देकर** `x^2 + y^2` के गुणांक `1` बनाएं, अन्यथा केंद्र और त्रिज्या दोनों गलत आएंगे।
2. **दीर्घवृत्त में** `a < b` **की स्थिति:** यदि `x^2/9 + y^2/25 = 1` दिया है, तो यहां दीर्घ अक्ष Y-अक्ष पर है (`b = 5 > a = 3`), अतः उत्केंद्रता `e = sqrt(1 - 9/25) = 4/5`, नाभियां `(0, +/- 4)` और नाभिलंब `2*a^2/b = 18/5` होगा (ncert.nic.in)।

5.5 IUC स्मृति ट्रिक (IUC 5-Second Shortcut Trick)

- **ट्रिक 1 (`T = 0` सार्वत्रिक स्पर्श रेखा प्रतिस्थापन):**

• किसी भी द्वितीय घात के वक्र (वृत्त, परवलय, दीर्घवृत्त, अतिपरवलय) के बिंदु (x1, y1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण निकालने के लिए केवल 3 प्रतिस्थापन करें: x^2 --> xx1, y^2 --> y y1, 2x --> (x + x1) और 2 y --> (y + y1)।

• **ट्रिक 2 (शिफ्टेड परवलय का शीर्ष आंशिक अवकलन से):**

• y^2 + 4y + 4x - 8 = 0 का शीर्ष निकालने के लिए पूर्ण वर्ग बनाने में समय न लगाएं: y के सापेक्ष अवकलन करके शून्य रखें: 2y + 4 = 0 ==> y = -2। अब y = -2 मूल समीकरण में रखें: 4 - 8 + 4x - 8 = 0 ==> x = 3। अतः शीर्ष = (3, -2) (www.iucacademy.com)!

मॉड्यूल 6: सीमा, सांतत्य, अवकलनीयता एवं अवकलज के अनुप्रयोग (Differential Calculus & AOD)

अध्याय के प्रमुख अध्ययन स्तंभ — मॉड्यूल 6: सीमा, सांतत्य, अवकलनीयता एवं अवकलज के अनुप्रयोग (Differential Calculus & AOD)

प्रमुख अध्ययन बिंदु 1	प्रमुख अध्ययन बिंदु 2	प्रमुख अध्ययन बिंदु 3
विस्तृत तुलनात्मक एवं महत्वपूर्ण सूत्र सारणी (Comparative & Formula Table)	क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)	परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)

6.1 प्रमुख चरण एवं प्रक्रिया प्रवाह

चरण 1 सीमा अस्तित्व एवं अनिर्धार्य रूप: LHL = RHL = परिमित मान; 0/0 या inf/inf रूप में L'Hospital Rule: lim [f'(x)/g'(x)]

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1	चरण 2	चरण 3	चरण 4
`	[नोड 2: सांतत्य एवं अवकलनीयता (Continuity & Diff.)] LHL = RHL = f(a)	संतत; LHD = RHD	अवकलनीय (प्रत्येक अवकलनीय फलन संतत होता है)`

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1	चरण 2
`	[नोड 3: अवकलन तकनीकें] Chain Rule, अस्पष्ट अवकलन (-F_x / F_y), लघुगणकीय अवकलन y = u^v, प्राचलिक (dy/dt)/(dx/dt)`

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1	चरण 2
`	[नोड 4: अवकलज के अनुप्रयोग (AOD)] स्पर्श रेखा प्रवणता dy/dx; वर्धमान f'(x) >= 0; उच्चिष्ठ/निम्निष्ठ: f'(c) = 0 एवं f''(c) < 0 (Max) या > 0 (Min)`

6.2 विस्तृत तुलनात्मक एवं महत्वपूर्ण सूत्र सारणी (Comparative & Formula Table)

क्र.सं.	कलन नियम / मानक सीमा	1D मानक गणितीय सूत्र (1D Formula)	मुख्य शर्त / डोमेन	परीक्षा अनुप्रयोग	आधिकारिक संदर्भ
1	त्रिकोणमितीय एवं घातांकीय मानक सीमाएं	`lim_(x->0) [sin(x)/x] = 1` ; `lim_(x->0) [(1 - cos(a*x))/x^2] = a^2 / 2`	`lim_(x->0) [(e^x - 1)/x] = 1` ; `lim_(x->0) [(a^x - 1)/x] = ln(a)`	0/0 रूप का त्वरित हल	ncert.nic.in
2	`1^infinity` अनिर्धार्य रूप की मास्टर सीमा	`lim_(x->a) [f(x)]^g(x) = e^[ lim_(x->a) g(x) * (f(x) - 1) ]`	जब `f(a) -> 1` और `g(a) -> infinity` हो	NDA एवं Air Force X का निश्चित प्रश्न	upsc.gov.in
3	प्रतिलोम त्रिकोणमितीय अवकलज	`d/dx [sin^-1(x)] = 1 / sqrt(1 - x^2)` ; `d/dx [tan^-1(x)] = 1 / (1 + x^2)`	`d/dx [sec^-1(x)] = 1 / ( x * sqrt(x^2 - 1))`	श्रृंखला नियम के प्रश्न	ncert.nic.in
4	चर की घात चर का अवकलन (`y = u^v`)	`d/dx [u^v] = u^v [ (v / u) (du/dx) + ln(u) * (dv/dx) ]`	जैसे `d/dx [x^x] = x^x * (1 + ln(x))`	बिना लॉग लिए 1-लाइन में उत्तर	www.iucacademy.com
5	प्राचलिक द्वितीय कोटि अवकलज (`d^2y/dx^2`)	`d^2y/dx^2 = [d/dt (dy/dx)] (dt/dx) = [x'y'' - y'*x''] / (x')^3`	केवल `(d^2y/dt^2) / (d^2x/dt^2)` करना पूर्णतः गलत है!	CUET, NDA एवं PGT	ncert.nic.in
6	रोले एवं लैग्रांज मध्यमान प्रमेय (MVT)	रोले (`f(a)=f(b)`): `f'(c) = 0` ; लैग्रांज: `f'(c) = [f(b) - f(a)] / (b - a)`	`[a, b]` में संतत और `(a, b)` में अवकलनीय होना अनिवार्य	`c in (a, b)` का मान निकालना	ncert.nic.in
7	स्पर्श रेखा एवं अभिलंब की प्रवणता	स्पर्श रेखा प्रवणता `m_T = (dy/dx)_(x1,y1)` ; अभिलंब प्रवणता `m_N = -1 / m_T`	क्षैतिज स्पर्श रेखा: `dy/dx = 0` ; ऊर्ध्वाधर: `dx/dy = 0`	ज्यामितीय कलन	upsc.gov.in
8	निरपेक्ष एवं स्थानीय उच्चिष्ठ/निम्निष्ठ	`x*e^(-x)` का उच्चिष्ठ `x = 1` पर `1/e` ; `(1/x)^x` का उच्चिष्ठ `x = 1/e` पर `e^(1/e)`	`ln(x)/x` का उच्चिष्ठ `x = e` पर `1/e` होता है	सीधे याद रखने योग्य मानक परिणाम	www.iucacademy.com

6.3 क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)

क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)
गणित में **"प्रत्येक अवकलनीय फलन अनिवार्य रूप से संतत होता है, किंतु प्रत्येक संतत फलन अवकलनीय हो यह आवश्यक नहीं है!"** इसका सबसे प्रसिद्ध उदाहरण मापांक फलन `f(x) = |x - a|` है, जो सर्वत्र संतत है परंतु अपने कोनीय बिंदु (Sharp Corner) `x = a` पर अवकलनीय नहीं है क्योंकि वहां `LHD = -1` और `RHD = +1` होता है। जर्मन गणितज्ञ कार्ल वीयरस्ट्रास ने तो एक ऐसा फलन खोजा था जो प्रत्येक बिंदु पर संतत है किंतु कहीं भी अवकलनीय नहीं है (ncert.nic.in)!

6.4 परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)

परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)

1. **महत्तम पूर्णांक फलन `[x]` की सीमा:** `lim_(x->n) [x]` (जहां `n` एक पूर्णांक है, जैसे `x -> 2`) का अस्तित्व **नहीं** होता! क्योंकि `LHL = lim_(h->0) [2 - h] = 1` जबकि `RHL = lim_(h->0) [2 + h] = 2` आता है।
2. `f'(c) = 0` **से सीधा उच्चिष्ठ/निम्निष्ठ मान लेना:** यदि `f'(c) = 0` और `f''(c) = 0` हो, किंतु `f'''(c) != 0` हो (जैसे `f(x) = x^3` में `x = 0` पर), तो वह बिंदु न उच्चिष्ठ है और न निम्निष्ठ, बल्कि **नति परिवर्तन बिंदु (Point of Inflection)** होता है (upsc.gov.in)!

6.5 IUC स्मृति ट्रिक (IUC 5-Second Shortcut Trick)

- **ट्रिक 1 (अस्पष्ट फलन `F(x, y) = 0` का आंशिक अवकलन शॉर्टकट):**
- `dy/dx` निकालने के लिए दोनों तरफ अवकलन करके पदों को पक्षांतर करने में समय न गंवाएं! सीधे सूत्र लगाएं: `dy/dx = - (dF/dx) / (dF/dy)` (जहां `dF/dx` करते समय `y` को अचर मानें और `dF/dy` करते समय `x` को अचर मानें)।
- **ट्रिक 2 (अनंत श्रेणी अवकलन `y = sqrt(f(x) + sqrt(f(x) + ... inf))`):**
- जब `y = sqrt(f(x) + y)` रूप हो, तो सदैव * `dy/dx = f'(x) / (2y - 1)` **होता है! और जब घात सीढ़ी** `y = f(x)^(f(x)^(...inf))` **हो, तो सदैव** `dy/dx = [y^2 f'(x)] / [f(x) (1 - y ln(f(x)))]` * होता है (www.iucacademy.com)।

मॉड्यूल 7: अनिश्चित एवं निश्चित समाकलन तथा वक्रों से घिरा क्षेत्रफल (Integral Calculus & Area)

अध्याय के प्रमुख अध्ययन स्तंभ — मॉड्यूल 7: अनिश्चित एवं निश्चित समाकलन तथा वक्रों से घिरा क्षेत्रफल (Integral Calculus & Area)

प्रमुख अध्ययन बिंदु 1	प्रमुख अध्ययन बिंदु 2	प्रमुख अध्ययन बिंदु 3
विस्तृत तुलनात्मक एवं महत्वपूर्ण सूत्र सारणी (Comparative & Formula Table)	क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)	परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)

7.1 प्रमुख चरण एवं प्रक्रिया प्रवाह

चरण 1 **अनिश्चित समाकलन एवं प्रतिस्थापन:** `Int [f'(x)/f(x)] dx = ln|f(x)| + C; 9 मानक द्विघात सूत्र`

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1	चरण 2
`	[नोड 2: खंडशः एवं आंशिक भिन्न] ILATE नियम: Int (uv) *dx* = *u*Int(v dx) - Int [u' *Int(v dx)*] *dx*; *Int* [e^x(f(x)+f'(x))] dx = e^x*f(x) + C`

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1	चरण 2
`	[नोड 3: निश्चित समाकलन के किंग्स गुणधर्म] P4 (King's Rule): Int_(a to b) f(x) dx = Int_(a to b) f(a + b - x) dx; सम/विषम फलन नियम`

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1
`

चरण 2
[नोड 4: वक्रों द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल (AOI)] Area = Int_(a to b) | y_upper - y_lower | dx; परवलय व रेखा क्षेत्रफल शॉर्टकट`

7.2 विस्तृत तुलनात्मक एवं महत्वपूर्ण सूत्र सारणी (Comparative & Formula Table)

क्र.सं.	समाकलन प्रकार / प्रमेय	1D मानक गणितीय सूत्र (1D Formula)	मुख्य शर्त / पहचान	परीक्षा अनुप्रयोग	आधिकारिक संदर्भ		
1	तीन मानक व्युत्क्रम द्विघात समाकलन	Int [1/(x^2 + a^2)] dx = (1/a)*tan*^-1(*x*/*a*) + *C* ; *Int [1/(x^2 - a^2)] dx* = (1/(2a))*ln	(x-a)/(x+a)	+ C`	Int [1/sqrt(a^2 - x^2)] dx = sin^-1(x/a) + C	पूर्ण वर्ग बनाकर समाकलन	ncert.nic.in
2	तीन मानक वर्गमूल समाकलन	Int sqrt(a^2 - x^2) dx = (x/2)*sqrt*(*a*^2 - *x*^2) + (*a*^2/2)sin^-1(x/a) + C	sqrt(x^2 +/- a^2) में दूसरा पद `(+/- a^2/2)*ln	x + sqrt(x^2 +/- a^2)	`	क्षेत्रफल गणना में अनिवार्य	ncert.nic.in
3	निरसन घातांकीय समाकलन (Cancellation Rule)	Int [e^x (*f*(*x*) + *f'*(*x*))] *dx* = *e*^*x* f(x) + C	जैसे Int [e^x (*tan*(*x*) + *sec*^2(*x*))] *dx* = *e*^*x* tan(x) + C	NDA/Air Force X में हर वर्ष 1 प्रश्न	upsc.gov.in		
4	सम एवं विषम फलन निश्चित समाकलन	Int_(-a to a) f(x) dx = 0 (यदि f(-x) = -f(x) विषम हो); = 2 * Int_(0 to a) f(x) dx (यदि सम हो)	जैसे Int_(-pi/2 to pi/2) [x^3 * cos(x) + tan^5(x)] dx = 0	जटिल समाकलन का शून्य उत्तर	ncert.nic.in		
5	वॉली का सूत्र (Wallis' Formula 0 to pi/2)	Int_(0 to pi/2) sin^n(x) dx = [(n-1)/n] [(*n*-3)/(*n*-2)] ... (1/2) (pi/2) (जब n सम हो)	यदि n विषम हो, तो अंत में (2/3) * 1 आता है (pi/2 से गुणा नहीं होता)	उच्च घात त्रिकोणमितीय समाकलन	www.iucacademy.com		
6	लाइबनिट्ज नियम (Leibniz Rule — समाकलन का अवकलन)	d/dx [Int_(g(x) to h(x)) f(t) dt] = f(h(x)) *h'*(*x*) - *f*(*g*(*x*)) g'(x)	चर सीमाओं वाले समाकलन का अवकलन एवं L'Hospital में प्रयोग	CUET, NDA एवं PGT	upsc.gov.in		
7	मानक लॉग-साइन समाकलन (Euler's Integral)	Int_(0 to pi/2) ln(sin(x)) dx = Int_(0 to pi/2) ln(cos(x)) dx = -(pi/2) * ln(2)	तथा Int_(0 to pi/2) ln(tan(x)) dx = 0	सीधा स्मृति-आधारित प्रश्न	ncert.nic.in		

क्र.सं.	समाकलन प्रकार / प्रमेय	1D मानक गणितीय सूत्र (1D Formula)	मुख्य शर्त / पहचान	परीक्षा अनुप्रयोग	आधिकारिक संदर्भ
8	परवलय एवं दीर्घवृत्त के मानक क्षेत्रफल	दीर्घवृत्त `x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1` का क्षेत्रफल = `pi a b`	परवलयों `y^2 = 4ax` तथा `x^2 = 4by` के बीच क्षेत्रफल = `(16 a b) / 3`	बिना समाकलन किए 2 सेकंड में क्षेत्रफल	www.iucacademy.com
9	परवलय एवं रेखा/नाभिलंब से घिरा क्षेत्रफल	`y^2 = 4ax` और नाभिलंब से घिरा क्षेत्रफल = `(8/3) * a^2`	`y^2 = 4ax` और रेखा `y = mx` के बीच क्षेत्रफल = `(8 a^2) / (3 * m^3)`	सर्वाधिक पूछे जाने वाले क्षेत्रफल	upsc.gov.in

7.3 क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)

क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)
निश्चित समाकलन का चौथा गुणधर्म `Int_(a to b) f(x) dx = Int_(a to b) f(a + b - x) dx` इतना शक्तिशाली है कि इसे प्रतियोगी गणित में **"King's Property"** कहा जाता है! जब भी कोई समाकलन `Int_(a to b) [g(x) / (g(x) + g(a + b - x))] dx` के रूप में दिखाई दे, तो चाहे `g(x)` कितना भी जटिल वर्गमूल, त्रिकोणमितीय या घातांकीय फलन क्यों न हो, समीकरण `(1)` और `(2)` को जोड़ने पर अंश व हर समान होकर कट जाते हैं और उत्तर सदैव `(b - a) / 2` आता है (ncert.nic.in)!

7.4 परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)

परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)
1. **मोड और महत्तम पूर्णांक का बिना तोड़े समाकलन:** `Int_(0 to 3) [x] dx` या `Int_(-1 to 2) |x - 1| dx` में सीधे सूत्र कभी न लगाएं! `[x]` को प्रत्येक पूर्णांक बिंदु (`0 to 1, 1 to 2, 2 to 3`) पर और `|x - a|` को उसके क्रांतिक बिंदु `x = a` पर तोड़ना अनिवार्य है।
2. **क्षेत्रफल में चिह्न की त्रुटि:** निश्चित समाकलन का मान ऋणात्मक हो सकता है (जैसे `Int_(0 to 2pi) sin(x) dx = 0`), परंतु `y = sin(x)` और X-अक्ष द्वारा `x = 0` से `2` pi तक **परिबद्ध क्षेत्रफल (Bounded Area)** शून्य नहीं, बल्कि `|-1| * 2 + 2 = 4` वर्ग इकाई होता है (प्रत्येक लूप का क्षेत्रफल = `2` वर्ग इकाई) (ncert.nic.in)!

7.5 IUC स्मृति ट्रिक (IUC 5-Second Shortcut Trick)

• **ट्रिक 1 (`(b - a) / 2` सार्वत्रिक उत्तर पहचान):**

• `Int_(0 to pi/2) [sin^n(x) / (sin^n(x) + cos^n(x))] dx = (pi/2 - 0)/2 = pi/4` (चाहे `n` का मान `1/2` , `3` , `99` या कुछ भी हो!)।

• `Int_(2 to 8) [sqrt(x) / (sqrt(x) + sqrt(10 - x))] dx = (8 - 2)/2 = 3` (क्योंकि `a + b = 2 + 8 = 10` है)।

• **ट्रिक 2 (`Int_(0 to n) [x] dx` और `Int_(0 to n) {x} dx` का 1-सेकंड सूत्र):**

• जहां `n` धन पूर्णांक है: महत्तम पूर्णांक समाकलन * `Int_(0 to n) [x] dx = n (n - 1) / 2` तथा भिन्नात्मक भाग समाकलन `Int_(0 to n) (x - [x]) dx = n / 2` ** होता है (www.iucacademy.com)!

मॉड्यूल 8: अवकल समीकरण (Differential Equations)

अध्याय के प्रमुख अध्ययन स्तंभ — मॉड्यूल 8: अवकल समीकरण (Differential Equations)

प्रमुख अध्ययन बिंदु 1	प्रमुख अध्ययन बिंदु 2	प्रमुख अध्ययन बिंदु 3
विस्तृत तुलनात्मक एवं महत्वपूर्ण सूत्र सारणी (Comparative & Formula Table)	क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)	परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)

8.1 प्रमुख चरण एवं प्रक्रिया प्रवाह

चरण 1 कोटि एवं घात (Order & Degree): कोटि = उच्चतम अवकलज; घात = अवकलजों में बहुपद बनने के बाद उच्चतम कोटि के अवकलज की उच्चतम घात

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1
`

चरण 2
[नोड 2: अवकल समीकरण का निर्माण] वक्र कुल में जितने स्वतंत्र स्वेच्छ अचर (Arbitrary Constants) = उतनी ही बार अवकलन = उतनी ही कोटि`

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1
`

चरण 2
[नोड 3: प्रथम कोटि-प्रथम घात हल विधियां] (1) चर पृथक्करण (Variable Separable), (2) समघातीय (y = v*x), (3) रैखिक अवकल समीकरण`

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1
`

चरण 2
[नोड 4: समाकलन गुणक एवं व्यापक हल] dy/dx + P(x)*y = Q(x)

चरण 3
IF = e^(Int P(x) dx)

चरण 4
हल: y (*IF*) = *Int* [*Q*(*x*) (IF)] dx + C`

8.2 विस्तृत तुलनात्मक एवं महत्वपूर्ण सूत्र सारणी (Comparative & Formula Table)

क्र.सं.	अवकल समीकरण संकल्पना	1D मानक गणितीय रूप / सूत्र (1D Formula)	मुख्य नियम / शर्त	परीक्षा अनुप्रयोग	आधिकारिक संदर्भ
1	कोटि एवं घात परिभाषा	Order = m (जहां d^m y / dx^m उच्चतम अवकलज है); Degree = उच्चतम अवकलज की पूर्णांक घात	भिन्नात्मक घात (जैसे (1 + (dy/dx)^2)^(3/2) = r*(d^2y/dx^2)) को पहले वर्ग करके हटाएं	NDA/CUET/ Air Force में 1-2 प्रश्न पक्के	ncert.nic.in
2	घात अपरिभाषित होने की स्थिति	जैसे dy/dx + sin(dy/dx) = 0 या e^(d^2y/dx^2) + y = 0	जब अवकलज sin, cos, ln, e के कोण/घातांक में फंसा हो, तो **घात अपरिभाषित (Not Defined)**	सबसे अधिक पूछा जाने वाला अपवाद	ncert.nic.in
3	चर पृथक्करण रूप (Variable Separable)	f(x) dx + g(y) dy = 0 ==> Int f(x) dx + Int g(y) dy = C	x के सभी पद dx के साथ और y के सभी पद dy के साथ	आधारभूत हल	ncert.nic.in

क्र.सं.	अवकल समीकरण संकल्पना	1D मानक गणितीय रूप / सूत्र (1D Formula)	मुख्य नियम / शर्त	परीक्षा अनुप्रयोग	आधिकारिक संदर्भ
4	समघातीय समीकरण (Homogeneous DE)	dy/dx = F(y/x) ==> प्रतिस्थापन y = vx एवं dy/dx = v + x (dv/dx)	अंश और हर के प्रत्येक पद की कुल घात समान होनी चाहिए	मानक प्रतिस्थापन विधि	upsc.gov.in
5	y में रैखिक अवकल समीकरण (Linear DE in y)	dy/dx + P(x)*y = Q(x) ==> IF = e^(Int P(x) dx)	व्यापक हल: y (IF) = Int [Q(x) (IF)] dx + C	सर्वाधिक महत्वपूर्ण प्रश्न प्रकार	ncert.nic.in
6	x में रैखिक अवकल समीकरण (Linear DE in x)	dx/dy + P1(y)*x = Q1(y) ==> IF = e^(Int P1(y) dy)	व्यापक हल: x (IF) = Int [Q1(y) (IF)] dy + C	जब y के पद जटिल हों	ncert.nic.in
7	यथार्थ अवकलल रूप (Exact Differentials)	xdy + ydx = d(xy); (x dy - y dx)/x^2 = d(y/x); (x dx + y dy) = (1/2)d(x^2 + y^2)	(xdy - ydx)/(x^2 + y^2) = d(tan^-1(y/x))	निरीक्षण विधि से तुरंत समाकलन	www.iucacademy.com
8	मानक ज्यामितीय वक्र कुल की कोटि	सभी वृत्तों का कुल: कोटि = 3; मूलबिंदु से जाने वाले वृत्त: कोटि = 2; अक्षों पर केंद्र वाले दीर्घवृत्त: कोटि = 2	स्वतंत्र अचरों की संख्या गिनें (C1 + C2 को 2 नहीं बल्कि 1 अचर गिनें)	NDA एवं TGT/PGT	upsc.gov.in

8.3 क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)

क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)

किसी वक्र कुल के समीकरण में दिखने वाले सभी अचर स्वतंत्र नहीं होते! उदाहरण के लिए, समीकरण y = A e^(x + B) में दिखने में A और B दो अचर लगते हैं, परंतु इसे y = (A e^B) e^x = K e^x लिखा जा सकता है, जिसमें प्रभावी स्वतंत्र अचर केवल **एक (K)** है! इसलिए इसके अवकल समीकरण की कोटि 2 नहीं बल्कि 1 (dy/dx = y) होती है (ncert.nic.in)।

8.4 परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)

परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)

1. **वक्रता त्रिज्या सूत्र में घात की गलती:** समीकरण [1 + (dy/dx)^2]^(3/2) = k (d^2y/dx^2) को देखकर छात्र सीधे घात 1 लिख देते हैं। ध्यान दें: बाएं पक्ष में भिन्नात्मक घात 3/2 है! पहले दोनों पक्षों का वर्ग करें: [1 + (dy/dx)^2]^3 = k^2 (d^2y/dx^2)^2, अब स्पष्ट है कि कोटि = 2 और घात = 2 है!
2. **समाकलन गुणक (IF) निकालते समय dy/dx का गुणांक 1 न बनाना:** यदि समीकरण x (dy/dx) + 2y = x^2 है, तो P(x) = 2 नहीं है! पहले x से भाग दें: dy/dx + (2/x)y = x, अब P(x) = 2/x है और IF = e^(Int (2/x) dx) = e^(2 ln(x)) = x^2 होगा (ncert.nic.in)।

8.5 IUC स्मृति ट्रिक (IUC 5-Second Shortcut Trick)

• **ट्रिक (लघुगणक हटाकर IF सीधा लिखना):**

• चूंकि e^(k ln(f(x))) = [f(x)]^k और e^(-k ln(f(x))) = 1 / [f(x)]^k होता है, इसलिए जब भी P(x) = k / x हो तो IF = x^k; जब P(x) = -k / x हो तो IF = 1 / x^k; जब P(x) = tan(x) हो तो IF = sec(x); और जब P(x) = cot(x) हो तो IF = sin(x) सीधे 1 सेकंड में लिखें (www.iucacademy.com)!

मॉड्यूल 9: सदिश बीजगणित एवं त्रिविमीय ज्यामिति (Vectors & 3D Geometry)

अध्याय के प्रमुख अध्ययन स्तंभ — मॉड्यूल 9: सदिश बीजगणित एवं त्रिविमीय ज्यामिति (Vectors & 3D Geometry)

प्रमुख अध्ययन बिंदु 1	प्रमुख अध्ययन बिंदु 2	प्रमुख अध्ययन बिंदु 3
विस्तृत तुलनात्मक एवं महत्वपूर्ण सूत्र सारणी (Comparative & Formula Table)	क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)	परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)

9.1 प्रमुख चरण एवं प्रक्रिया प्रवाह

चरण 1 सदिश एवं दिक-कोज्याएं (Vectors & Direction Cosines): `|r| = sqrt(x^2+y^2+z^2); l = cos(alpha), m = cos(beta), n = cos(gamma) ==> l^2 + m^2 + n^2 = 1`

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1	चरण 2	चरण 3	चरण 4
`	[नोड 2: अदिश एवं सदिश गुणन (Dot & Cross Product)] a . b = |a||b|cos(theta) (लंबवत <	a.b = 0); a x b = |a||b| sin(theta)*n_hat (समांतर <	a x b = 0)`

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1	चरण 2	चरण 3
`	[नोड 3: अदिश त्रिक गुणन एवं समतलीयता] [a b c] = a . (b x c) = समांतर षट्फलक का आयतन; समतलीय (Coplanar) <	a b c] = 0`

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1	चरण 2
`	[नोड 4: 3D रेखा एवं समतल समीकरण] रेखा: (x-x1)/a = (y-y1)/b = (z-z1)/c; समतल: ax + by + c*z + d = 0; विषमतलीय रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी`

9.2 विस्तृत तुलनात्मक एवं महत्वपूर्ण सूत्र सारणी (Comparative & Formula Table)

क्र.सं.	सदिश / 3D संकल्पना	1D मानक गणितीय सूत्र (1D Formula)	ज्यामितीय अर्थ / शर्त	परीक्षा अनुप्रयोग	आधिकारिक संदर्भ				
1	दिक-कोज्याओं के वर्गों का संबंध	**cos^2(alpha) + cos^2(beta) + cos^2(gamma) = 1** तथा **sin^2(alpha) + sin^2(beta) + sin^2(gamma) = 2**	**cos(2*alpha*) + *cos*(2beta) + cos(2*gamma) = -1**	हर वर्ष NDA/ CUET में पूछा जाने वाला प्रश्न	ncert.nic.in				
2	प्रक्षेप सूत्र (Projection of **a** on **b**)	`Projection = (a . b) /	b	**; प्रक्षेप सदिश =** [(a . b) /	b	^2] * b`	सदिश **b** की दिशा में **a** की छाया	सदिश बीजगणित का मूल प्रश्न	ncert.n
3	लैग्रांज की सर्वसमिका (Lagrange's Identity)	`	a x b	^2 + (a . b)^2 =	a	^2 *	b	^2`	क्योंकि **sin^2 + cos^2(= 1**
4	सदिश से त्रिभुज एवं समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल	त्रिभुज (संलग्न भुजाएं **a, b**): `(1/2)*	a x b	**; समांतर चतुर्भुज (भुजाएं) :**	a x b	`	यदि विकर्ण **d1, d2** दिए हों, तो समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल = `(1/2)*	d1 x d2	`
5	सदिश त्रिक गुणन (Vector Triple Product)	**a x (b x c) = (a . c)*b* - (*a* . *b*)c**	यह सदिश **b** और **c** के समतल में स्थित होता है और **a** के लंबवत होता है	TGT/ PGT एवं NDA	www.iucacademy.com				
6	विषमतलीय रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी (Skew Lines)	`SD =	(a2 - a1) . (b1 x b2)	/	b1 x b2	`	प्रतिच्छेदी (Intersecting) या समतलीय होने की शर्त: **(a2 - a1) . (b1 x b2) = 0**	3D ज्यामिति का मुख्य सूत्र	ncert.n
7	समतल से बिंदु **(x1, y1, z1)** की दूरी व प्रतिबिंब	`d =	a*x*1 + *b*y1 + c*z1 + d	/ sqrt(a^2 + b^2 + c^2)`	लंब पाद/प्रतिबिंब: **(x-x1)/a = (y-y1)/b = (z-z1)/c = -k(*a*x1+*b*y1+ *c*z1+d)/ (a^2+b^2+c^2)**	**k = 1** (लंब पाद), **k = 2** (प्रतिबिंब)	upsc.gov.in		
8	रेखा और समतल के बीच का कोण (**phi**)	`sin(phi) =	b . n	/ (	b	*	n	)`	क्योंकि स अभिलंब समतल से पर होता है (**sin(cos(90**

क्र.सं.	सदिश / 3D संकल्पना	1D मानक गणितीय सूत्र (1D Formula)	ज्यामितीय अर्थ / शर्त	परीक्षा अनुप्रयोग	आधिकारिक संदर्भ
9	गोलक (Sphere) का व्यापक समीकरण	x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0	केंद्र = (-u, -v, -w) तथा त्रिज्या R = sqrt(u^2 + v^2 + w^2 - d)	NDA एवं TGT/ PGT 3D गोला	www.iucacademy.com

9.3 क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)

क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)
त्रिविमीय आकाश (3D Space) में एक घन (Cube) के **4 मुख्य विकर्ण (Main Diagonals)** होते हैं जिनके दिक-अनुपात (1, 1, 1), (-1, 1, 1), (1, -1, 1) और (1, 1, -1) होते हैं। किसी भी दो मुख्य विकर्णों के बीच का कोण सदैव cos^-1(1/3) होता है! और यदि कोई रेखा घन के चारों विकर्णों से क्रमशः alpha, beta, gamma, delta कोण बनाती है, तो सदैव cos^2(alpha) + cos^2(beta) + cos^2(gamma) + cos^2(delta) = 4/3 होता है (upsc.gov.in)!

9.4 परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)

परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)
1. **3D रेखा के कार्तीय रूप में मानक चिह्न की त्रुटि:** यदि रेखा का समीकरण (2 - x)/3 = (y + 4)/2 = (2*z - 6)/4 दिया है, तो इसके दिक-अनुपात (3, 2, 4) **नहीं** हैं! पहले x, y, z के गुणांक +1 बनाएं: (x - 2)/(-3) = (y + 4)/2 = (z - 3)/2। सही दिक-अनुपात (-3, 2, 2) हैं!
2. **रेखा और समतल के समांतर होने की शर्त:** दो समतलों के समांतर होने के लिए a1/a2 = b1/b2 = c1/c2 होता है, परंतु एक **रेखा और समतल** के समांतर होने के लिए रेखा और समतल के अभिलंब को परस्पर लंबवत होना पड़ता है, अर्थात् * a1 a2 + b1b2 + c1c2 = 0** (ncert.nic.in)!

9.5 IUC स्मृति ट्रिक (IUC 5-Second Shortcut Trick)

• **ट्रिक (|a + b| = |a - b| और इकाई सदिश कोण ट्रिक):**

• यदि |a + b| = |a - b| हो, तो सदिश a और b सदैव परस्पर **लंबवत (theta = 90°)** होते हैं।

• यदि a और b दो इकाई सदिश हैं और a + b भी एक इकाई सदिश है (|a| = |b| = |a + b| = 1), तो a और b के बीच का कोण सदैव * 120° (2 pi/3) **होता है और तब** |a - b| = sqrt(3) ** होता है (www.iucacademy.com)!

मॉड्यूल 10: सांख्यिकी, प्रायिकता, रैखिक प्रोग्रामन एवं संख्यात्मक विधियां (Statistics, Probability, LPP & Numerical Methods)

अध्याय के प्रमुख अध्ययन स्तंभ — मॉड्यूल 10: सांख्यिकी, प्रायिकता, रैखिक प्रोग्रामन एवं संख्यात्मक विधियां (Statistics, Probability, LPP & Numerical Methods)

प्रमुख अध्ययन बिंदु 1
विस्तृत तुलनात्मक एवं महत्वपूर्ण सूत्र सारणी (Comparative & Formula Table)

प्रमुख अध्ययन बिंदु 2
क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)

प्रमुख अध्ययन बिंदु 3
परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)

10.1 प्रमुख चरण एवं प्रक्रिया प्रवाह

चरण 1 **केंद्रीय प्रवृत्ति एवं प्रकीर्णन (Statistics):**
Mode = 3*Median* - 2Mean; प्रसरण (sigma^2) = Sum(x_i^2)/n - (Mean)^2; SD (sigma) = sqrt(Variance)

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1
`

चरण 2
[नोड 2: सहसंबंध एवं समाश्रयण (Correlation & Regression)] r = +/- sqrt(b_yx * b_xy) in [-1, 1]; दोनों समाश्रयण रेखाएं (x_bar, y_bar) पर प्रतिच्छेद करती हैं

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1
`

चरण 2
[नोड 3: सप्रतिबंध प्रायिकता एवं बेज प्रमेय] P(A|B) = P(A Int B)/P(B); स्वतंत्र घटनाएं: P(A Int B) = P(A)P(B); द्विपद बंटन: *Mean* = *np*, Var = *npq*`

संकल्पनात्मक प्रवाह आरेख (Step-by-Step Process Flow)

चरण 1
`

चरण 2
[नोड 4: रैखिक प्रोग्रामन (LPP) एवं संख्यात्मक विधियां] सुसंगत क्षेत्र (Convex Polygon) के कोनीय बिंदुओं (Corner Points) पर Z = a*x* + *by* का इष्टतम मान`

10.2 विस्तृत तुलनात्मक एवं महत्वपूर्ण सूत्र सारणी (Comparative & Formula Table)

क्र.सं.	सांख्यिकीय / प्रायिकता विषय	1D मानक गणितीय सूत्र (1D Formula)	मुख्य गुणधर्म / शर्त	परीक्षा अनुप्रयोग	आधिकारिक संदर्भ		
1	मूलबिंदु एवं पैमाने के परिवर्तन का प्रभाव (y = a*x + b)	नया माध्य y_bar = a * x_bar + b ; नया मानक विचलन `sigma_y =	a	* sigma_x`	नया प्रसरण Var(y) = a^2 * Var(x) (जोड़ने/घटाने b से प्रसरण व SD अपरिवर्तित!)	NDA एवं CUET में सर्वाधिक पूछा जाने वाला	ncert.nic.in
2	प्रथम n प्राकृत संख्याओं का प्रसरण	Mean = (n + 1)/2 ; Variance (sigma^2) = (n^2 - 1) / 12	प्रथम n सम या विषम प्राकृत संख्याओं का प्रसरण = (n^2 - 1) / 3	सीधा सूत्र आधारित प्रश्न	upsc.gov.in		
3	विचरण गुणांक (Coefficient of Variation - CV)	CV = (sigma / Mean) * 100	जिसका CV जितना **कम**, वह श्रेणी उतनी ही अधिक **संगत (Consistent/ Stable)**	दो खिलाड़ियों/ शेयरों की संगतता तुलना	ncert.nic.in		

क्र.सं.	सांख्यिकीय / प्रायिकता विषय	1D मानक गणितीय सूत्र (1D Formula)	मुख्य गुणधर्म / शर्त	परीक्षा अनुप्रयोग	आधिकारिक संदर्भ			
4	समाश्रयण गुणांक एवं सहसंबंध (**b_yx, b_xy, r**)	**b_yx = r (*sigma_y* / *sigma_x*)** ; **b_xy = r** (sigma_x / sigma_y); **r^2 = b_yx * b_xy**	**r** , **b_yx** और **b_xy** तीनों के चिह्न सदैव समान होते हैं तथा **b_yx * b_xy <= 1**	NDA सांख्यिकी का प्रमुख खंड	upsc.gov.in			
5	कुल प्रायिकता एवं स्वतंत्र घटनाएं	**P(A U B) = P(A) + P(B) - P(A Int B)** ; कम से कम एक = **1 - P(A')*P(B')**	अपवर्जी (Mutually Exclusive): **P(A Int B) = 0** ; स्वतंत्र: **P(A Int B) = P(A)*P(B)**	समस्या हल करने के प्रश्न	ncert.nic.in			
6	बेज प्रमेय (Bayes' Theorem)	`P(E_i	A) = [P(E_i) * P(A	E_i)] / Sum_{j=1 to n} [P(E_j) * P(A	E_j)]`	जब परिणाम ज्ञात हो और कारण की प्रायिकता पूछी जाए	बोर्ड, CUET एवं NDA	ncert.nic.in
7	द्विपद प्रायिकता बंटन (Binomial Distribution)	**P(X = r) = nCr *p^r* q^(n -r)** (जहां **p + q = 1**)	माध्य **Mean = *np*** ; प्रसरण ***Variance* = *n*** p*q; सदैव **Mean > Variance**	माध्य एवं प्रसरण देखकर **n, p** निकालना	upsc.gov.in			
8	पॉइसन बंटन एवं LPP कोनीय बिंदु प्रमेय	पॉइसन: **P(X = r) = (e^(-m) * m^r) / r!** (जहां **Mean = Variance = m**)	LPP सुसंगत क्षेत्र सदैव एक **उत्तल बहुभुज (Convex Set)** होता है	TGT/PGT एवं CUET	www.iucacademy.com			
9	न्यूटन-रैफसन एवं सिम्पसन का 1/3 नियम (TGT/ PGT)	न्यूटन-रैफसन: **x_(n+1) = x_n - f(x_n)/ f'(x_n)** (द्विघातीय अभिसरण दर = 2)	सिम्पसन 1/3: **(h/3)[(*y_0* + *y_n*) + 4(विषम पद) + 2*(सम पद)]** (सम उप-अंतराल आवश्यक)	TGT/PGT एवं CUET PG संख्यात्मक विश्लेषण	www.iucacademy.com			

10.3 क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)

क्या आप जानते हैं? (Did You Know?)
एक सामान्य अधिवर्ष (Leap Year — 366 दिन = 52 सप्ताह + 2 अतिरिक्त दिन) में 53 रविवार (या कोई भी एक निश्चित वार) होने की प्रायिकता `2/7` होती है, जबकि एक साधारण वर्ष (Non-Leap Year — 365 दिन = 52 सप्ताह + 1 दिन) में यह प्रायिकता `1/7` होती है! और यदि प्रश्न पूछे कि अधिवर्ष में "53 रविवार **या** 53 सोमवार" होने की प्रायिकता क्या है, तो `P(A U B) = 2/7 + 2/7 - 1/7 = 3/7` होती है (ncert.nic.in)!

10.4 परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)

परीक्षा जाल सतर्कता (Exam Trap Alert!)
1. **परस्पर अपवर्जी (Mutually Exclusive) बनाम स्वतंत्र (Independent) घटनाएं:** छात्र इन्हें एक ही मान लेते हैं! यदि दो घटनाएं `A` और `B` (जिनकी प्रायिकताएं शून्येतर हैं: `P(A) > 0, P(B) > 0`) **स्वतंत्र** हैं, तो वे कभी भी **परस्पर अपवर्जी नहीं हो सकतीं** (और यदि अपवर्जी हैं तो स्वतंत्र नहीं हो सकतीं), क्योंकि `P(A)*P(B) != 0`!
2. **द्विपद बंटन की वैधता परीक्षण:** यदि किसी प्रश्न में द्विपद बंटन का माध्य `4` और प्रसरण `5` दिया हो, तो तुरंत उत्तर **"असंभव / आंकड़े गलत हैं"** टिक करें! क्योंकि `q = Variance / Mean = 5/4 = 1.25 > 1` जो असंभव है (`Variance` सदैव `Mean` से छोटा होता है) (upsc.gov.in)।

10.5 IUC स्मृति ट्रिक (IUC 5-Second Shortcut Trick)

• **ट्रिक 1 (समाश्रयण रेखाओं से माध्य `(x_bar, y_bar)` 3 सेकंड में निकालना):**

• यदि दो समाश्रयण रेखाओं के समीकरण दिए हों (जैसे `3x + 2y = 26` और `6*x + y = 31`) और `x` तथा `y` के माध्य पूछे जाएं, तो उन दोनों युगपत समीकरणों को हल कर लें! उनका प्रतिच्छेद बिंदु ही `(x_bar, y_bar) = (4, 7)` होता है।

• **ट्रिक 2 (दो पासों के योग की त्रिभुज प्रायिकता ट्रिक):**

• दो पासों को फेंकने पर योग `S` (`2 <= S <= 12`) आने के अनुकूल परिणाम याद रखने के लिए `7` को केंद्र मानें: योग `7` के लिए सर्वाधिक `6` तरीके हैं; `7` से जितना दूर जाएंगे, तरीके उतने ही कम होंगे: `Ways = 6 - |7 - S|`! (जैसे योग `9` के लिए `6 - |7 - 9| = 4` तरीके, अतः प्रायिकता = `4/36 = 1/9`) (www.iucacademy.com)।

अंतिम समय त्वरित वन-लाइनर रिवीजन कैप्सूल (100-Point Rapid Revision Capsule)

1. `n` अवयवों वाले समुच्चय के कुल उपसमुच्चयों (Subsets) की संख्या `2^n` तथा उचित उपसमुच्चयों (Proper Subsets) की संख्या `2^n - 1` होती है (ncert.nic.in)।
2. घात समुच्चय `P(A)` के घात समुच्चय `P(P(A))` में यदि `A = phi` (रिक्त समुच्चय) हो, तो अवयवों की संख्या `2^(2^0) = 2` होती है।
3. `n` अवयवों वाले समुच्चय `A` पर कुल संबंध `2^(n^2)` तथा स्वतुल्य और सममित दोनों होने वाले संबंध `2^(n*(n-1)/2)` होते हैं।
4. फलन `f(x) = sqrt(a^2 - x^2)` का प्रांत (Domain) `[-a, a]` और परिसर (Range) `[0, a]` होता है।
5. फलन `f(x) = 1 / sqrt(a^2 - x^2)` का प्रांत खुला अंतराल `(-a, a)` और परिसर `[1/a, infinity)` होता है।
6. सम्मिश्र संख्या `z = x + iy` का गुणात्मक प्रतिलोम `z^-1 = (x - iy) / (x^2 + y^2)` होता है।
7. किसी भी शुद्ध काल्पनिक संख्या (Purely Imaginary Number) के लिए `z + z_bar = 0` तथा शुद्ध वास्तविक संख्या के लिए `z = z_bar` होता है।
8. `|z1 + z2|^2 + |z1 - z2|^2 = 2 * (|z1|^2 + |z2|^2)` को समांतर चतुर्भुज नियम कहा जाता है।
9. इकाई के घनमूलों के लिए `1 + omega^n + omega^(2*n) = 3` (यदि `n` संख्या 3 का गुणज हो) अन्यथा मान `0` होता है।
10. यूलर सूत्र के अनुसार `e^(itheta) = cos(theta) + isin(theta)` तथा विश्व प्रसिद्ध सर्वसमिका `e^(i*pi) + 1 = 0` है।
11. द्विघात समीकरण `ax^2 + bx + c = 0` के मूल परिमेय (Rational) होंगे यदि `a, b, c in Q` हों और `D = b^2 - 4ac` एक पूर्ण वर्ग हो।

12. यदि द्विघात समीकरण का एक मूल p + sqrt(q) (अपरिमेय) है, तो दूसरा मूल अनिवार्य रूप से p - sqrt(q) होगा (जब गुणांक परिमेय हों)।

13. द्विघात व्यंजक ax^2 + bx + c सदैव धनात्मक (> 0 for all x in R) होगा यदि और केवल यदि a > 0 तथा D < 0 हो (upsc.gov.in)।

14. द्विघात व्यंजक का चरम मान x = -b / (2a) पर प्राप्त होता है और यह मान -D / (4a) = (4ac - b^2) / (4*a) के बराबर होता है।

15. यदि किसी समांतर श्रेणी का p वां पद q हो और q वां पद p हो, तो उसका n वां पद T_n = p + q - n तथा (p+q) वां पद 0 होता है।

16. दो धनात्मक संख्याओं a और b के समांतर, गुणोत्तर और हरात्मक माध्यों में संबंध AM >= GM >= HM तथा GM^2 = AM * HM होता है।

17. यदि a, b, c समांतर श्रेणी (AP) में हैं तो 2b = a + c; गुणोत्तर श्रेणी (GP) में हैं तो b^2 = ac; और हरात्मक श्रेणी (HP) में हैं तो b = 2ac / (a + c) होता है।

18. e का श्रेणी प्रसार e = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + ... infinity है जिसका मान 2 और 3 के बीच (approx 2.718) होता है।

19. ln(1 + x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + ... (-1 < x <= 1) तथा ln(2) = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ... होता है।

20. (1 - x)^(-n) के प्रसार में x^r का गुणांक (n + r - 1) C r होता है।

21. पास्कल नियम के अनुसार nCr + nC(r-1) = (n+1)Cr तथा nCr / nC(r-1) = (n - r + 1) / r होता है (ncert.nic.in)।

22. n भुजाओं वाले बहुभुज में विकर्णों (Diagonals) की कुल संख्या nC2 - n = n * (n - 3) / 2 होती है।

23. एक समतल में n असरेख बिंदुओं से बनने वाले त्रिभुजों की संख्या nC3 होती है (यदि k बिंदु सरेख हों तो nC3 - kC3)।

24. m समांतर रेखाओं और n तिर्यक समांतर रेखाओं के प्रतिच्छेदन से बनने वाले समांतर चतुर्भुजों की संख्या mC2 * nC2 होती है।

25. दो आव्यूहों का गुणन A * B तभी परिभाषित है जब प्रथम आव्यूह A के स्तंभों की संख्या द्वितीय आव्यूह B की पंक्तियों की संख्या के बराबर हो।

26. किसी भी विषम सममित आव्यूह A (A^T = -A) के मुख्य विकर्ण के सभी अवयव अनिवार्य रूप से शून्य (a_ii = 0) होते हैं।

27. यदि A एक 3 x 3 आव्यूह है और |A| = 5 है, तो |adj(A)| = 5^(3-1) = 25 तथा |2A| = 2^3 5 = 40 होगा।

28. किसी सारणिक की किसी पंक्ति के अवयवों को किसी दूसरी पंक्ति के संगत सहखंडों (Cofactors) से गुणा करके जोड़ने पर योगफल सदैव 0 प्राप्त होता है।

29. वेंडरमोंड सारणिक |[1, a, a^2; 1, b, b^2; 1, c, c^2]| का मान (a - b) (b - c) (c - a) होता है।

30. समघातीय रैखिक समीकरण निकाय A*X = O सदैव संगत (Consistent) होता है; यदि |A| = 0 हो तो इसके अनंत अतुच्छ हल (Non-trivial Solutions) होते हैं।

31. 1 रेडियन = (180 / pi) डिग्री approx 57° 16' 22'' तथा चाप की लंबाई l = r theta और त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल A = (1/2) r^2 * theta होता है।

32. sec^2(theta) - tan^2(theta) = 1 से यदि sec(theta) + tan(theta) = k हो, तो sec(theta) - tan(theta) = 1/k और sec(theta) = (k + 1/k)/2 होता है।

33. sin(A + B) sin(A - B) = sin^2(A) - sin^2(B) तथा cos(A + B) cos(A - B) = cos^2(A) - sin^2(B) होता है।

34. tan(3theta) = (3tan(theta) - tan^3(theta)) / (1 - 3tan^2(theta)) तथा cos(3 theta) = 4cos^3(theta) - 3cos(theta) होता है।

35. tan(45° + theta) = (1 + tan(theta)) / (1 - tan(theta)) = (cos(theta) + sin(theta)) / (cos(theta) - sin(theta)) होता है।

36. sin^n(x) और cos^n(x) का आवर्तकाल (Period) यदि n विषम हो तो 2*pi और यदि n सम हो तो pi होता है; जबकि tan^n(x) का आवर्तकाल सदैव pi होता है (www.iucacademy.com)।

37. 2tan^-1(x) = sin^-1(2x / (1 + x^2)) = cos^-1((1 - x^2) / (1 + x^2)) = tan^-1(2*x / (1 - x^2)) (मुख्य प्रांत में)।

38. sin^-1(-x) = -sin^-1(x) और tan^-1(-x) = -tan^-1(x), परंतु cos^-1(-x) = pi - cos^-1(x) तथा cot^-1(-x) = pi - cot^-1(x) होता है!

39. किसी त्रिभुज में नेपियर के सादृश्य सूत्र के अनुसार tan((B - C)/2) = [(b - c)/(b + c)] * cot(A/2) होता है।

40. अर्ध-कोण सूत्र: sin(A/2) = sqrt(((s-b)(s-c))/(bc)), cos(A/2) = sqrt((s(s-a))/(bc)) तथा tan(A/2) = Delta / (s*(s-a))।

41. यदि किसी त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक पूर्णांक (Integers) हों, तो वह त्रिभुज कभी भी **समबाहु त्रिभुज (Equilateral Triangle)** नहीं हो सकता!

42. दो रेखाओं y = m1x + c1 और y = m2x + c2 के बीच का न्यून कोण tan(theta) = |(m1 - m2) / (1 + m1*m2)| होता है।

43. रेखा ax + by + c = 0 के समांतर रेखा ax + by + k = 0 तथा लंबवत रेखा bx - ay + k = 0 होती है।

44. दो रेखाओं के बीच के कोणों के समद्विभाजकों का समीकरण (a1x + b1y + c1)/sqrt(a1^2 + b1^2) = +/- (a2x + b2y + c2)/sqrt(a2^2 + b2^2) होता है।

45. व्यास के सिरों (x1, y1) और (x2, y2) वाले वृत्त का समीकरण (x - x1)(x - x2) + (y - y1)(y - y2) = 0 होता है (ncert.nic.in)।

46. बाह्य बिंदु (x1, y1) से वृत्त S = 0 पर खींची गई स्पर्श रेखा की लंबाई L = sqrt(S1) होती है, जहां S1 = x1^2 + y1^2 + 2gx1 + 2fy1 + c है।

47. दो वृत्तों की प्रवणता या लाम्बिक काट (Orthogonal Intersection) की शर्त 2g1g2 + 2f1f2 = c1 + c2 होती है।

48. दो प्रतिच्छेदी वृत्तों S1 = 0 और S2 = 0 की उभयनिष्ठ जीवा (Common Chord) तथा मूलाक्ष (Radical Axis) का समीकरण S1 - S2 = 0 होता है।

49. व्यापक द्विघात समीकरण शांकव को निरूपित करता है: परवलय यदि h^2 = ab, दीर्घवृत्त यदि h^2 < ab, और अतिपरवलय यदि h^2 > a*b (जब Delta != 0)।

50. परवलय y^2 = 4ax पर रेखा y = mx + c स्पर्श रेखा होगी यदि और केवल यदि c = a / m हो, और स्पर्श बिंदु (a/m^2, 2a/m) होता है।

51. परवलय की किसी भी नाभीय जीवा (Focal Chord) के खंडों की लंबाइयां l1 और l2 हों, तो उनका हरात्मक माध्य अर्ध-नाभिलंब होता है: 1/l1 + 1/l2 = 1/a।

52. परवलय की दो परस्पर लंबवत स्पर्श रेखाएं सदैव उसकी **नियता (Directrix)** पर प्रतिच्छेद करती हैं और नाभीय जीवा के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएं नियता पर समकोण बनाती हैं (upsc.gov.in)।

53. दीर्घवृत्त x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 का प्राचलिक बिंदु (acos(theta), bsin(theta)) तथा अतिपरवलय का (asec(theta), btan(theta)) होता है।

54. lim_(x->0) [(1 + x)^(1/x)] = e तथा lim_(n->infinity) [(1 + k/n)^n] = e^k होता है।

55. lim_(x->a) [(x^n - a^n) / (x - a)] = n * a^(n - 1) सभी परिमेय n के लिए सत्य है।

56. मापांक फलन का अवकलज d/dx [|x|] = x / |x| = |x| / x (x != 0 के लिए) होता है।

57. d/dx [log_a(x)] = 1 / (x ln(a)) तथा d/dx [a^x] = a^x ln(a) होता है।

58. प्रतिलोम त्रिकोणमितीय प्रतिस्थापन: sqrt(a^2 - x^2) में x = asin(theta); sqrt(a^2 + x^2) में x = atan(theta); sqrt(x^2 - a^2) में x = a*sec(theta) रखें।

59. d/dx [sin^-1(2*x / (1 + x^2))] का मान |x| < 1 के लिए 2 / (1 + x^2) होता है।

60. किसी फलन f(x) का उसके सापेक्ष अवकलज 1 और f(x) का g(x) के सापेक्ष अवकलज f'(x) / g'(x) होता है।

61. गोले के आयतन V = (4/3)pir^3 के परिवर्तन की दर त्रिज्या के सापेक्ष उसके पृष्ठीय क्षेत्रफल 4pir^2 के बराबर होती है (dV/dr = S)।

62. वक्र `y = f(x)` के किसी बिंदु पर अधोस्पर्शी (Subtangent) की लंबाई `|y / (dy/dx)|` तथा अधोलंब (Subnormal) की लंबाई `|y * (dy/dx)|` होती है।

63. परवलय `y^2 = 4ax` के किसी भी बिंदु पर अधोलंब (Subnormal) की लंबाई अचर होती है और अर्ध-नाभिलंब `2*a` के बराबर होती है!

64. दिए गए परिमाप वाले सभी आयतों में **वर्ग (Square)** का क्षेत्रफल अधिकतम होता है, और दिए गए पृष्ठीय क्षेत्रफल वाले सभी बंद बेलनों में जब `h = 2*r` (ऊंचाई = व्यास) हो तब आयतन अधिकतम होता है (ncert.nic.in)।

65. `Int tan(x) dx = ln|sec(x)| + C = -ln|cos(x)| + C` तथा `Int cot(x) dx = ln|sin(x)| + C` होता है।

66. `Int sec(x) dx = ln|sec(x) + tan(x)| + C = ln|tan(pi/4 + x/2)| + C` होता है।

67. `Int cosec(x) dx = ln|cosec(x) - cot(x)| + C = ln|tan(x/2)| + C` होता है।

68. `Int [1 / (a^2sin^2(x) + b^2cos^2(x))] dx` को हल करने के लिए अंश और हर में `cos^2(x)` से भाग देकर `tan(x) = t` प्रतिस्थापित किया जाता है।

69. `Int [1 / (a + b*cos(x))] dx` में अर्ध-कोण सूत्र `cos(x) = (1 - tan^2(x/2)) / (1 + tan^2(x/2))` का प्रयोग किया जाता है।

70. `Int e^(ax) sin(bx) dx = [e^(ax) / (a^2 + b^2)] [asin(bx) - bcos(b*x)] + C` होता है।

71. आवर्ती फलन `f(x)` (जिसका आवर्तकाल `T` है) के लिए `Int_(0 to nT) f(x) dx = n Int_(0 to T) f(x) dx` होता है (जैसे `Int_(0 to 100pi) |sin(x)| dx = 100 2 = 200`)!

72. गामा-बीटा समाकलन शॉर्टकट: `Int_(0 to infinity) [e^(-x) * x^n] dx = Gamma(n + 1) = n!` (जब `n` धन पूर्णांक हो)।

73. रीमान योग सीमा: `lim_(n->infinity) Sum_{r=1 to n} [(1/n) * f(r/n)] = Int_(0 to 1) f(x) dx` होती है (www.iucacademy.com)।

74. हीरा/समचतुर्भुज `|x|/a + |y|/b = 1` से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल सदैव `2 a b` वर्ग इकाई होता है (जैसे `|x| + |y| = 1` का क्षेत्रफल `= 2`)।

75. मूलबिंदु पर केंद्र वाले सभी वृत्तों `x^2 + y^2 = r^2` का अवकल समीकरण `x + y * (dy/dx) = 0` होता है।

76. सभी सरल रेखाओं `y = m*x + c` के कुल का अवकल समीकरण `d^2y / dx^2 = 0` होता है।

77. अवकल समीकरण `dy/dx = y/x` का व्यापक हल सरल रेखा कुल `y = c*x` है, जबकि `dy/dx = -x/y` का हल वृत्त कुल `x^2 + y^2 = c^2` है।

78. यदि तीन सदिशों के लिए `a + b + c = 0` हो, तो `a x b = b x c = c x a` होता है और तीनों सदिश एक त्रिभुज की क्रमागत भुजाएं निरूपित करते हैं।

79. अदिश त्रिक गुणन में `[a + b, b + c, c + a] = 2 * [a b c]` तथा `[a - b, b - c, c - a] = 0` होता है!

80. एक समचतुष्फलक (Tetrahedron) जिसकी संलग्न कोरें सदिश `a, b, c` हैं, उसका आयतन `(1/6) * |[a b c]|` होता है।

81. बल `F` द्वारा किसी कण को बिंदु `A` से बिंदु `B` तक विस्थापित करने में किया गया कार्य `W = F . AB` तथा बिंदु `O` के परितः बल-आघूर्ण (Torque) `tau = r x F` होता है।

82. X, Y और Z अक्षों की दिक-कोज्याएं (Direction Cosines) क्रमशः `(1, 0, 0)`, `(0, 1, 0)` और `(0, 0, 1)` होती हैं (ncert.nic.in)।

83. निर्देशांक अक्षों से समान कोण बनाने वाली रेखा की दिक-कोज्याएं `(+/- 1/sqrt(3), +/- 1/sqrt(3), +/- 1/sqrt(3))` होती हैं (ऐसी कुल 4 रेखाएं संभव हैं)।

84. अंतःखंड रूप में समतल का समीकरण `x/a + y/b + z/c = 1` होता है जो अक्षों को `(a, 0, 0), (0, b, 0)` और `(0, 0, c)` पर काटता है।

85. दो समतलों `P1 = 0` और `P2 = 0` की प्रतिच्छेदन रेखा से होकर जाने वाले समतल का समीकरण `P1 + lambda * P2 = 0` होता है।

86. प्रेक्षणों के किसी समुच्चय में **माध्य से लिए गए विचलनों का बीजगणितीय योग सदैव शून्य (`Sum (x_i - x_bar) = 0`)** होता है।

87. प्रेक्षणों का **माध्य विचलन (Mean Deviation)** सबसे कम तब होता है जब उसे **माध्यिका (Median)** के सापेक्ष मापा जाता है!

88. प्रेक्षणों के **विचलनों के वर्गों का योग (Sum (x_i - A)^2)** सबसे कम तब होता है जब A समांतर माध्य (Mean) के बराबर हो (upsc.gov.in)।

89. एक सममित बंटन (Symmetric Distribution) के लिए **Mean = Median = Mode** होता है, और विषम बंटन के लिए **Mode = 3*Median* - 2Mean** होता है।

90. सहसंबंध गुणांक **r** मूलबिंदु और पैमाने के परिवर्तन से स्वतंत्र होता है (बशर्ते पैमाने के गुणांकों के चिह्न ध्यान में रखे जाएं: **u = (x-a)/h, v = (y-b)/k**).

91. दो समाश्रयण रेखाओं के बीच का कोण: यदि **r = 0** हो तो दोनों रेखाएं परस्पर **लंबवत** होती हैं, और यदि **r = +/- 1** हो तो दोनों रेखाएं **संपाती (Coincident)** होती हैं।

92. यदि **P(A) = 0.6, P(B) = 0.5** और **P(A|B) = 0.4** हो, तो **P(A Intersection B) = P(B) *P(A|B)* = 0.5 0.4 = 0.20** होता है।

93. यदि **A** और **B** स्वतंत्र घटनाएं हैं, तो **(A' और B)** , **(A और B')** तथा **(A' और B')** भी अनिवार्य रूप से स्वतंत्र घटनाएं होती हैं।

94. ताश की 52 पत्तों की गड्डी में 4 इक्के (Aces) और 12 फेस कार्ड (4 बादशाह K, 4 बेगम Q, 4 गुलाम J) होते हैं।

95. **n** सिक्कों को एक साथ उछालने पर कुल परिणाम **2^n** तथा ठीक **r** चित (Heads) आने की प्रायिकता **nCr / 2^n** होती है।

96. किसी यादृच्छिक चर **X** के प्रायिकता बंटन में सभी प्रायिकताओं का योग **Sum P(X_i) = 1** तथा प्रत्याशा (माध्य) **E(X) = Sum [X_i * P(X_i)]** होती है।

97. यादृच्छिक चर के प्रसरण का सूत्र **Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2** तथा **Var(a*X* + *b*) = *a*^2 Var(X)** होता है (ncert.nic.in)।

98. रैखिक प्रोग्रामन (LPP) में यदि सुसंगत क्षेत्र के दो कोनीय बिंदुओं पर उद्देश्य फलन **Z** का समान अधिकतम मान प्राप्त होता है, तो उन दोनों बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड के **प्रत्येक बिंदु** पर वही अधिकतम मान प्राप्त होगा।

99. संख्यात्मक समाकलन में समलम्बाकार नियम (Trapezoidal Rule) वक्र को रैखिक (**1** घात बहुपद) और सिम्पसन का **1/3** नियम परवलयिक (**2** घात बहुपद) मानता है।

100. अग्र अंतर संकारक (Forward Difference Operator **Delta**) और पश्चांतर संकारक (**Nabla**) तथा विस्थापन संकारक (**E**) में संबंध **E = 1 + Delta** और **Delta - Nabla = Delta * Nabla** होता है (www.iucacademy.com)।

भाग 1: 5 उन्नत गहन अध्ययन मॉड्यूल (शॉर्ट-ट्रिक्स, प्रमेय एवं महत्वपूर्ण सूत्र)

अध्याय के प्रमुख अध्ययन स्तंभ — भाग 1: 5 उन्नत गहन अध्ययन मॉड्यूल (शॉर्ट-ट्रिक्स, प्रमेय एवं महत्वपूर्ण सूत्र)

प्रमुख अध्ययन बिंदु 1	प्रमुख अध्ययन बिंदु 2	प्रमुख अध्ययन बिंदु 3	प्रमुख अध्ययन बिंदु 4
मॉड्यूल 1: बीजगणित — सम्मिश्र संख्याएँ (Complex Numbers), द्विघात समीकरण (Quadratic Equations), क्रमचय-संचय (Permutations & Combinations) एवं द्विपद प्रमेय (Binomial Theorem)	मॉड्यूल 2: आव्यूह, सारणिक (Matrices & Determinants) एवं शंकु परिच्छेद (Conic Sections)	मॉड्यूल 3: अवकलन गणित — सीमा, सांतत्य, अवकलनीयता (Limits, Continuity, Differentiability) एवं उच्चिष्ठ-निम्निष्ठ (Maxima-Minima)	मॉड्यूल 4: समाकलन गणित (Definite Integration) एवं अवकल समीकरण (Differential Equations)

मॉड्यूल 1: बीजगणित — सम्मिश्र संख्याएँ (Complex Numbers), द्विघात समीकरण (Quadratic Equations), क्रमचय-संचय (Permutations & Combinations) एवं द्विपद प्रमेय (Binomial Theorem)

1.1 सम्मिश्र संख्याएँ (Complex Numbers) — मूल प्रमेय एवं शॉर्ट-ट्रिक्स

एक सम्मिश्र संख्या को मानक 1D रूप में `z = x + i*y` लिखा जाता है, जहाँ `x = Re(z)` वास्तविक भाग है, `y = Im(z)` काल्पनिक भाग है और `i = sqrt(-1)` आयोटा है (UPSC NDA Paper-1 संदर्भ)।

- **आयोटा (i) की चक्रीय घातों का नियम:**
- `i^1 = i`, `i^2 = -1`, `i^3 = -i`, `i^4 = 1`
- चार क्रमागत घातों का योग सदैव शून्य होता है: `i^n + i^(n+1) + i^(n+2) + i^(n+3) = 0`
- **शॉर्ट-ट्रिक 1:** `(1 + i)^2 = 2i` तथा `(1 - i)^2 = -2` i। इसी प्रकार `(1 + i) / (1 - i) = i` तथा `(1 - i) / (1 + i) = -i`। यदि परीक्षा में `[(1 + i) / (1 - i)]^n = 1` पूछा जाए, तो न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक `n = 4` होगा।
- **मापांक (Modulus), संयुग्मी (Conjugate) और कोणांक (Argument):**
- मापांक: `|z| = sqrt(x^2 + y^2)`
- संयुग्मी: `conj(z) = x - iy` तथा `z` conj(z) = |z|^2 = x^2 + y^2
- मुख्य कोणांक `Arg(z)` का परिसर `(-pi, pi]` होता है। यदि `alpha = arctan(|y / x|)` हो, तो:
- प्रथम चतुर्थांश (`x > 0, y > 0`): `Arg(z) = alpha`
- द्वितीय चतुर्थांश (`x < 0, y > 0`): `Arg(z) = pi - alpha`
- तृतीय चतुर्थांश (`x < 0, y < 0`): `Arg(z) = -(pi - alpha) = alpha - pi`
- चतुर्थ चतुर्थांश (`x > 0, y < 0`): `Arg(z) = -alpha`
- **त्रिभुज असमिका (Triangle Inequality):** `| |z1| - |z2| | <= |z1 + z2| <= |z1| + |z2|`
- **समांतर चतुर्भुज नियम:** `|z1 + z2|^2 + |z1 - z2|^2 = 2 * (|z1|^2 + |z2|^2)`
- **यूलर एवं डी-मॉइवर प्रमेय (Euler & De-Moivre's Theorem):**
- यूलर रूप: `e^(itheta) = cos(theta) + isin(theta)`
- डी-मॉइवर प्रमेय: `(cos(theta) + isin(theta))^n = cos(ntheta) + isin(ntheta)`
- **इकाई के घनमूल (Cube Roots of Unity — 1, omega, omega^2):**

• मान: omega = (-1 + i*sqrt(3)) / 2 तथा omega^2 = (-1 - i sqrt(3)) / 2

• मूल सर्वसमिकाएँ: 1 + omega + omega^2 = 0 तथा omega^3 = 1

• **शॉर्ट-ट्रिक 2:** 1 + omega^n + omega^(2*n) = 3 (यदि n, 3 का गुणज है) और 0 (यदि n, 3 का गुणज नहीं है)।

• **शॉर्ट-ट्रिक 3 (वर्गमूल सूत्र):** किसी सम्मिश्र संख्या a + i*b का वर्गमूल बिना लंबे समीकरण हल किए सीधे महत्वपूर्ण सूत्र से निकालें:

• sqrt(a + ib) = +/- [sqrt((|z| + a) / 2) + i sign(b) * sqrt((|z| - a) / 2)], जहाँ |z| = sqrt(a^2 + b^2)।

• **ज्यामितीय शॉर्ट-ट्रिक:** यदि z1, z2, z3 किसी समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं और परिवृत्त का केंद्र z0 है, तो z1^2 + z2^2 + z3^2 = z1z2 + z2z3 + z3z1 तथा z1^2 + z2^2 + z3^2 = 3 (z0)^2।

1.2 द्विघात समीकरण (Quadratic Equations) — मूलों की प्रकृति एवं शॉर्ट-ट्रिक्स

मानक द्विघात समीकरण ax^2 + bx + c = 0 (जहाँ a != 0) के मूल श्रीधराचार्य सूत्र से x = [-b +/- sqrt(D)] / (2a) होते हैं, जहाँ विविक्तकर (*Discriminant*) D = b^2 - 4 a*c है (CUET UG परीक्षा मानक)।

• **मूलों और गुणांकों में संबंध:**

• मूलों का योग: alpha + beta = -b / a

• मूलों का गुणनफल: alpha * beta = c / a

• मूलों का अंतर: |alpha - beta| = sqrt(D) / |a| = sqrt(b^2 - 4ac) / |a|

• **सममित फलनों के 1D मानक सूत्र:**

• alpha^2 + beta^2 = (alpha + beta)^2 - 2alphabeta = (b^2 - 2ac) / a^2

• alpha^3 + beta^3 = (alpha + beta)^3 - 3alphabeta(alpha + beta) = (-b^3 + 3abc) / a^3

• alpha^4 + beta^4 = (alpha^2 + beta^2)^2 - 2(alphabeta)^2

• **शॉर्ट-ट्रिक 4 (गुणांकों का योग शून्य नियम):** यदि किसी द्विघात समीकरण ax^2 + bx + c = 0 में a + b + c = 0 हो, तो उसके मूल तुरंत 1 और c / a होते हैं। यदि a - b + c = 0 हो, तो उसके मूल -1 और -c / a होते हैं।

• **शॉर्ट-ट्रिक 5 (अनुपात ट्रिक):** यदि ax^2 + bx + c = 0 का एक मूल दूसरे का k गुना है (beta = k alpha), तो बिना मूल निकाले सीधा संबंध लगाएं: k b^2 = (k + 1)^2 a c।

• विशेष स्थिति: यदि एक मूल दूसरे का दोगुना हो (k = 2), तो 2b^2 = 9ac। यदि एक मूल दूसरे का वर्ग हो (beta = alpha^2), तो b^3 + a^2 c + ac^2 = 3abc।

• **उभयनिष्ठ मूल (Common Roots) की शर्त:**

• समीकरण a1x^2 + b1x + c1 = 0 तथा a2x^2 + b2x + c2 = 0 में एक मूल उभयनिष्ठ होने की शर्त: (c1a2 - c2a1)^2 = (b1c2 - b2c1)(a1b2 - a2*b1)।

• दोनों मूल उभयनिष्ठ होने की शर्त: (a1 / a2) = (b1 / b2) = (c1 / c2)।

• **द्विघात व्यंजक का चरम मान:** यदि a > 0, तो f(x) = ax^2 + bx + c का न्यूनतम मान x = -b / (2a) पर f_min = (4 ac - b^2) / (4a) = -D / (4a) होता है। यदि a < 0, तो यही अधिकतम मान f_max = -D / (4 a) होता है।

1.3 क्रमचय एवं संचय (Permutations & Combinations) — प्रमेय एवं शॉर्ट-ट्रिक्स

• **मूल सूत्र:**

• क्रमचय (चयन + व्यवस्था): nPr = n! / (n - r)!

• संचय (केवल चयन): nCr = n! / [r! * (n - r)!]

• पूरक गुणधर्म: nCr = nC(n - r)। यदि nCx = nCy हो, तो या तो x = y होगा या x + y = n होगा।

• पास्कल सर्वसमिका: nCr + nC(r - 1) = (n + 1)Cr

• अनुपात गुणधर्म: nCr / nC(r - 1) = (n - r + 1) / r

• **चक्रीय क्रमचय (Circular Permutations):**

• n भिन्न वस्तुओं को वृत्त में व्यवस्थित करने के तरीके (जब दक्षिणावर्त और वामावर्त भिन्न हों, जैसे मेज के चारों ओर व्यक्ति): (n - 1)!

• जब दक्षिणावर्त और वामावर्त में भेद न हो (जैसे माला या हार के मोती): (n - 1)! / 2

• **शॉर्ट-ट्रिक 6 (अव्यवस्था प्रमेय / Derangement Theorem):** यदि n पत्रों को n लिफाफों में इस प्रकार रखा जाए कि कोई भी पत्र अपने सही लिफाफे में न जाए, तो कुल तरीकों की संख्या:

• D(n) = n! [1 - (1 / 1!) + (1 / 2!) - (1 / 3!) + ... + (-1)^n (1 / n!)]

• परीक्षा हेतु सीधे मान याद रखें: D(1) = 0, D(2) = 1, D(3) = 2, D(4) = 9, D(5) = 44, D(6) = 265।

• **शॉर्ट-ट्रिक 7 (ज्यामितीय गणना एवं भिखारी पद्धति / Beggar's Method):**

• समतल में n बिंदुओं (जिनमें से m संरेख हैं) से बनने वाली सरल रेखाएँ: nC2 - mC2 + 1।

• उन्हीं बिंदुओं से बनने वाले त्रिभुज: nC3 - mC3।

• n भुजाओं वाले बहुभुज के विकर्णों की संख्या: nC2 - n = n * (n - 3) / 2।

• m समांतर रेखाओं और n तिर्यक समांतर रेखाओं के जाल से बनने वाले समांतर चतुर्भुजों की संख्या: mC2 * nC2।

• शतरंज के n x n बोर्ड में कुल वर्गों की संख्या: n (n + 1) (2n + 1) / 6 तथा कुल आयतों की संख्या: [n (n + 1) / 2]^2।

• n एकसमान वस्तुओं को r व्यक्तियों में बाँटने के तरीके (जब किसी को शून्य भी मिल सके): (n + r - 1)C(r - 1)।

• जब प्रत्येक व्यक्ति को कम से कम 1 वस्तु अवश्य मिले: (n - 1)C(r - 1)।

1.4 द्विपद प्रमेय (Binomial Theorem) — व्यापक पद एवं शॉर्ट-ट्रिक्स

प्रसार: (x + a)^n = sum(r = 0 to n) [nCr x^(n - r) a^r], जहाँ कुल पदों की संख्या n + 1 होती है।

• **व्यापक पद (General Term):** (r + 1) वाँ पद T_(r+1) = nCr x^(n - r) a^r।

• **मध्य पद (Middle Term):**

• यदि n सम (Even) है, तो केवल एक मध्य पद होगा: (n/2 + 1) वाँ पद।

• यदि n विषम (Odd) है, तो दो मध्य पद होंगे: ((n + 1)/2) वाँ तथा ((n + 3)/2) वाँ पद।

• **शॉर्ट-ट्रिक 8 (x^m से स्वतंत्र पद / विशेष घात का गुणांक):**

• (a x^p + b / x^q)^n के प्रसार में x^m वाले पद के लिए r का मान बिना प्रसार किए सीधे सूत्र से निकालें: r = (n p - m) / (p + q)।

• x से स्वतंत्र पद (Constant Term) के लिए m = 0 रखें, अर्थात: r = (n*p) / (p + q)।

• **द्विपद गुणांकों का योग:**

• सभी गुणांकों का योग: C0 + C1 + C2 + ... + Cn = 2^n

• सम एवं विषम स्थान के गुणांकों का योग: C0 + C2 + C4 + ... = C1 + C3 + C5 + ... = 2^(n - 1)

• गुणांकों के वर्गों का योग: (C0)^2 + (C1)^2 + ... + (Cn)^2 = (2n)Cn = (2n)! / (n!)^2

• **बहुपद प्रमेय (Multinomial Theorem):** (x1 + x2 + ... + xk)^n के प्रसार में कुल भिन्न पदों की संख्या (n + k - 1)C(k - 1) होती है और सभी गुणांकों का योग (जब x1 = x2 = ... = xk = 1 रखा जाए) k^n होता है।

मॉड्यूल 2: आव्यूह, सारणिक (Matrices & Determinants) एवं शंकु परिच्छेद (Conic Sections)

2.1 आव्यूह एवं सारणिक (Matrices & Determinants) — गुणधर्म एवं ट्रिक्स

• विशिष्ट आव्यूहों के लक्षण (भारतीय वायुसेना ग्रुप-X परीक्षा मानक):

• सममित आव्यूह (Symmetric Matrix): `A^T = A` अर्थात `a_ij = a_ji`।

• विषम सममित आव्यूह (Skew-Symmetric Matrix): `A^T = -A` अर्थात `a_ij = -a_ji` तथा मुख्य विकर्ण के सभी अवयव `a_ii = 0` होते हैं।

• प्रमेय: किसी विषम कोटि (`n` विषम, जैसे `3 x 3`) के विषम सममित आव्यूह का सारणिक सदैव शून्य होता है (`|A| = 0`), जबकि सम कोटि के विषम सममित आव्यूह का सारणिक एक पूर्ण वर्ग संख्या होता है।

• लांबिक आव्यूह (Orthogonal Matrix): `A A^T = A^T A = I`, जिसके लिए `|A| = +/- 1` तथा `A^(-1) = A^T`।

• वर्गसम आव्यूह (Idempotent Matrix): `A^2 = A` (अतः `|A| = 0` या `1`)।

• अंतर्वलनी आव्यूह (Involutory Matrix): `A^2 = I` (अतः `A^(-1) = A`)।

• शून्यंभावी आव्यूह (Nilpotent Matrix): `A^k = O` (न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक `k` को सूचकांक कहते हैं और `|A| = 0`)।

• सारणिक एवं सहखंडज (Adjoint & Inverse) के स्वर्णिम महत्वपूर्ण सूत्र (`n x n` कोटि के आव्यूह `A` के लिए):

• `|k A| = k^n |A|`

• `A adj(A) = adj(A) A = |A| * I_n`

• `|adj(A)| = |A|^(n - 1)`

• `|adj(adj(A))| = |A|^((n - 1)^2)`

• `adj(adj(A)) = |A|^(n - 2) * A`

• `adj(k A) = k^(n - 1) adj(A)`

• `adj(A B) = adj(B) adj(A)` (उत्क्रमण नियम)

• `A^(-1) = adj(A) / |A|` (जब `|A| != 0`) तथा `|A^(-1)| = 1 / |A|`

• शॉर्ट-ट्रिक 9 (`2 x 2` आव्यूह का तुरंत व्युत्क्रम):

• यदि `A = [[a, b], [c, d]]` हो, तो मुख्य विकर्ण के अवयवों `a, d` को आपस में बदलें और शेष विकर्ण `b, c` के चिह्न बदलें: `adj(A) = [[d, -b], [-c, a]]` तथा `A^(-1) = [1 / (ad - bc)] * [[d, -b], [-c, a]]`।

• अभिलाक्षणिक समीकरण एवं कैले-हैमिल्टन प्रमेय (Cayley-Hamilton Theorem):

• `2 x 2` आव्यूह के लिए: `lambda^2 - tr(A)lambda + |A| = 0`, जहाँ `tr(A) = a_11 + a_22` (आइगेन मानों का योग) और `|A| = lambda_1` lambda_2 (आइगेन मानों का गुणनफल)।

• `3 x 3` आव्यूह के लिए: `lambda^3 - tr(A)lambda^2 + (M_11 + M_22 + M_33)lambda - |A| = 0`।

• *रैखिक समीकरण निकाय `A` X = B की संगतता (Cramer's Rule & Rank Criterion):**

• अद्वितीय हल (Unique Solution): `|A| != 0` या `rank(A) = rank([A : B]) = n`।

• अनंत हल (Infinite Solutions): `|A| = 0` तथा `(adj(A)) * B = O` (या `Delta = Delta_x = Delta_y = Delta_z = 0` और `rank(A) = rank([A : B]) < n`)।

• कोई हल नहीं (No Solution / Inconsistent): `|A| = 0` तथा `(adj(A)) * B != O` (अर्थात `rank(A) != rank([A : B])`)।

2.2 शंकु परिच्छेद (Conic Sections — वृत्त, परवलय, दीर्घवृत्त एवं अतिपरवलय)

व्यापक द्विघात समीकरण `ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0` का विविक्तकर `Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2` है:

- यदि `Delta = 0`: यह सरल रेखाओं के युग्म को निरूपित करता है। उनके बीच का कोण `tan(theta) = [2 sqrt(h^2 - ab)] / |a + b|`।
- यदि `Delta != 0`:
- `a = b` तथा `h = 0` -> वृत्त (Circle)
- `h^2 - a*b = 0` -> परवलय (Parabola)
- `h^2 - a*b < 0` -> दीर्घवृत्त (Ellipse)
- `h^2 - a*b > 0` -> अतिपरवलय (Hyperbola); यदि साथ में `a + b = 0` हो तो समकोणीय अतिपरवलय (Rectangular Hyperbola, उत्केंद्रता `e = sqrt(2)`)।
- **वृत्त (Circle):** समीकरण `x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0` का केंद्र `(-g, -f)` और त्रिज्या `r = sqrt(g^2 + f^2 - c)`। बाह्य बिंदु `(x1, y1)` से स्पर्श रेखा की लंबाई `L = sqrt(S1) = sqrt(x1^2 + y1^2 + 2gx1 + 2fy1 + c)`।
- *परवलय (*Parabola* — `y^2 = 4ax`):*
- शीर्ष: `(0, 0)`, नाभि (Focus): `(a, 0)`, नियता (Directrix): `x = -a`, नाभिलंब (Latus Rectum): `4*a`, उत्केंद्रता: `e = 1`।
- प्रवणता `m` वाली स्पर्श रेखा: `y = mx + (a / m)`, जिसका स्पर्श बिंदु `(a / m^2, 2a / m)` होता है।
- **शॉर्ट-ट्रिक 10 (परवलय द्वारा घिरा क्षेत्रफल):**
- परवलय `y^2 = 4ax` और उसके नाभिलंब से घिरा क्षेत्रफल = `(8 / 3) * a^2`।
- दो परवलयों `y^2 = 4ax` तथा `x^2 = 4by` के बीच घिरा क्षेत्रफल = `(16 a b) / 3`।
- परवलय `y^2 = 4ax` और सरल रेखा `y = mx` के बीच घिरा क्षेत्रफल = `(8 a^2) / (3 * m^3)`।
- **दीर्घवृत्त (Ellipse — `x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1`, `a > b`):**
- उत्केंद्रता: `e = sqrt(1 - b^2 / a^2)` (अर्थात `b^2 = a^2 * (1 - e^2)`)।
- नाभियाँ: `(+/- ae, 0)`, नियताएँ: `x = +/- (a / e)`, नाभिलंब की लंबाई: `(2 b^2) / a`।
- किसी बिंदु `P` की दोनों नाभियों से दूरियों का योग: `SP + S'P = 2*a` (दीर्घ अक्ष की लंबाई)।
- दीर्घवृत्त का संपूर्ण क्षेत्रफल: `Area = pi a b`।
- नियामक वृत्त (Director Circle — जहाँ से खींची गई स्पर्श रेखाएँ परस्पर लंबवत हों): `x^2 + y^2 = a^2 + b^2`।
- **अतिपरवलय (Hyperbola — `x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1`):**
- उत्केंद्रता: `e = sqrt(1 + b^2 / a^2)` (अर्थात `b^2 = a^2 * (e^2 - 1)`)।
- नाभियाँ: `(+/- ae, 0)`, नाभिलंब की लंबाई: `(2 b^2) / a`, नाभीय दूरियों का अंतर: `|SP - S'P| = 2*a`।
- संयुग्मी अतिपरवलय की उत्केंद्रता `e2` और मूल अतिपरवलय की उत्केंद्रता `e1` में संबंध: `(1 / e1^2) + (1 / e2^2) = 1`।
- अनंतस्पर्शियों (Asymptotes) का समीकरण: `y = +/- (b / a) * x`।

मॉड्यूल 3: अवकलन गणित — सीमा, सांतत्य, अवकलनीयता (Limits, Continuity, Differentiability) एवं उच्चिष्ठ-निम्निष्ठ (Maxima-Minima)

3.1 सीमा (Limits) — मानक सूत्र एवं शॉर्ट-ट्रिक्स

- **मानक सीमाएँ (Standard Limits):**

- `lim(x -> 0) [sin(x) / x] = 1` तथा `lim(x -> 0) [tan(x) / x] = 1`
- `lim(x -> 0) [(1 - cos(x)) / x^2] = 1 / 2` तथा `lim(x -> 0) [(1 - cos(mx)) / (1 - cos(nx))] = m^2 / n^2`
- `lim(x -> a) [(x^n - a^n) / (x - a)] = n * a^(n - 1)`
- `lim(x -> 0) [(e^x - 1) / x] = 1` तथा `lim(x -> 0) [(a^x - 1) / x] = ln(a)`
- `lim(x -> 0) [ln(1 + x) / x] = 1`
- **शॉर्ट-ट्रिक 11 (`1^infinity` अनिर्धार्य रूप):**
- यदि `lim(x -> a) f(x) = 1` और `lim(x -> a) g(x) = infinity` हो, तो:

`lim(x -> a) [f(x)]^g(x) = exp( lim(x -> a) [ g(x) * (f(x) - 1) ] )`।

- उदाहरण: `lim(x -> 0) (1 + kx)^(m / x) = e^(km)` तथा `lim(x -> infinity) [(x + a) / (x + b)]^(x + c) = e^(a - b)`।
- **एल-हॉस्पिटल नियम (L'Hospital's Rule):** `0 / 0` या `infinity / infinity` रूप में अंश और हर का अलग-अलग अवकलन तब तक करें जब तक अनिर्धार्य रूप समाप्त न हो जाए: `lim(x -> a) [f(x) / g(x)] = lim(x -> a) [f'(x) / g'(x)]`।

3.2 सांतत्य एवं अवकलनीयता (Continuity & Differentiability)

- कोई फलन `f(x)` बिंदु `x = a` पर संतत (Continuous) होता है यदि: `LHL = RHL = f(a)`, अर्थात `lim(h -> 0) f(a - h) = lim(h -> 0) f(a + h) = f(a)`।
- कोई फलन `f(x)` बिंदु `x = a` पर अवकलनीय (Differentiable) होता है यदि बायाँ अवकलज (LHD) और दायाँ अवकलज (RHD) परिमित एवं बराबर हों:

`LHD = lim(h -> 0) [f(a - h) - f(a)] / (-h) = RHD = lim(h -> 0) [f(a + h) - f(a)] / h`।

- **महत्वपूर्ण प्रमेय एवं काउंटर-एग्जाम्पल्स (NDA में बार-बार पूछे जाने वाले):**
- प्रत्येक अवकलनीय फलन अनिवार्य रूप से संतत होता है, परंतु प्रत्येक संतत फलन का अवकलनीय होना आवश्यक नहीं है।
- मापांक फलन `f(x) = |x - a|` सर्वत्र संतत है, किंतु कोणीय बिंदु `x = a` पर अवकलनीय नहीं है (`LHD = -1`, `RHD = +1`)।
- महत्तम पूर्णांक फलन `f(x) = [x]` (Greatest Integer Function) प्रत्येक पूर्णांक `x = n` पर असंतत तथा अनवकलनीय दोनों होता है।
- **शॉर्ट-ट्रिक 12 (अस्पष्ट फलन और अनंत श्रेणी का अवकलन):**
- यदि `F(x, y) = 0` दिया हो, तो `dy/dx = -(dF/dx) / (dF/dy)` (अंश में `y` को अचर मानकर `x` के सापेक्ष आंशिक अवकलन और हर में `x` को अचर मानकर `y` के सापेक्ष आंशिक अवकलन)।
- यदि `y = sqrt(f(x) + sqrt(f(x) + sqrt(f(x) + ... infinity)))` हो, तो `y^2 = f(x) + y`, अत: सीधा अवकलज: `dy/dx = f'(x) / (2*y - 1)`।
- यदि `y = f(x)^(f(x)^(f(x)^... infinity))` हो, तो सीधा अवकलज: `dy/dx = [y^2 f'(x)] / [f(x) (1 - y * ln(f(x)))]`।

3.3 रोले, लैग्रांज प्रमेय एवं उच्चिष्ठ-निम्निष्ठ (Maxima-Minima)

- **रोले का प्रमेय (Rolle's Theorem):** यदि `f(x)` बंद अंतराल `[a, b]` में संतत, खुले अंतराल `(a, b)` में अवकलनीय तथा `f(a) = f(b)` हो, तो कम से कम एक बिंदु `c in (a, b)` ऐसा होगा जहाँ `f'(c) = 0`।
- **लैग्रांज का माध्यमान प्रमेय (LMVT):** उपरोक्त पहली दो शर्तों के अंतर्गत कम से कम एक `c in (a, b)` ऐसा होगा जहाँ `f'(c) = [f(b) - f(a)] / (b - a)`।
- **उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ (Maxima & Minima) की शर्तें:**
- क्रांतिक बिंदु के लिए `f'(x) = 0` रखें। मान लीजिए `x = c` एक मूल है:

- यदि `f''(c) < 0` -> `x = c` पर स्थानीय उच्चिष्ठ (Local Maxima)।
- यदि `f''(c) > 0` -> `x = c` पर स्थानीय निम्निष्ठ (Local Minima)।
- यदि `f''(c) = 0` तथा `f'''(c) != 0` -> `x = c` नति परिवर्तन बिंदु (Point of Inflection) है।
- **शॉर्ट-ट्रिक 13 (त्रिकोणमितीय एवं चरघातांकी चरम मान):**
- `f(x) = asin(x) + bcos(x) + c` का अधिकतम मान `c + sqrt(a^2 + b^2)` तथा न्यूनतम मान `c - sqrt(a^2 + b^2)` होता है।
- `f(x) = a^2 tan^2(x) + b^2 cot^2(x)` का न्यूनतम मान `2ab` होता है (AM >= GM से)।
- `f(x) = a^2 sec^2(x) + b^2 cosec^2(x)` का न्यूनतम मान `(a + b)^2` होता है।
- **सर्वश्रेष्ठ परीक्षा मान:** फलन `f(x) = (1 / x)^x` का अधिकतम मान `x = 1/e` पर `e^(1/e)` होता है, तथा `g(x) = x^(1/x)` का अधिकतम मान `x = e` पर `e^(1/e)` होता है।

मॉड्यूल 4: समाकलन गणित (Definite Integration) एवं अवकल समीकरण (Differential Equations)

4.1 निश्चित समाकलन (Definite Integration) — प्रगुण एवं शॉर्ट-ट्रिक्स

- **किंग्स प्रॉपर्टी (King's Property — P4):**

`integral(a to b) f(x) dx = integral(a to b) f(a + b - x) dx`

विशेष रूप: `integral(0 to a) f(x) dx = integral(0 to a) f(a - x) dx`।

- **शॉर्ट-ट्रिक 14 (King's Property मानक सममिति सूत्र):**

यदि कोई समाकलन `I = integral(a to b) [ f(x) / (f(x) + f(a + b - x)) ] dx` के रूप में हो, तो बिना हल किए उसका सीधा उत्तर लिखें: `I = (b - a) / 2`।

- उदाहरण 1: `integral(0 to pi/2) [ (sin(x))^n / ((sin(x))^n + (cos(x))^n) ] dx = (pi/2 - 0) / 2 = pi / 4` (किसी भी वास्तविक संख्या `n` के लिए)।
- उदाहरण 2: `integral(pi/6 to pi/3) [ 1 / (1 + (tan(x))^(sqrt(2026))) ] dx = (pi/3 - pi/6) / 2 = pi / 12`।
- **सम-विषम फलन प्रगुण (Even-Odd Property):**

`integral(-a to a) f(x) dx = 0` (यदि `f(-x) = -f(x)`, अर्थात विषम फलन हो) तथा `2 * integral(0 to a) f(x) dx` (यदि `f(-x) = f(x)`, अर्थात सम फलन हो)।

- **शॉर्ट-ट्रिक 15 (वैलिस सूत्र / Wallis Formula):**

`integral(0 to pi/2) (sin(x))^n dx = integral(0 to pi/2) (cos(x))^n dx = [(n - 1) / n] [(n - 3) / (n - 2)] ... (1 / 2) (pi / 2)` (जब `n` सम हो) तथा `... (2 / 3) 1` (जब `n` विषम हो, इसमें `pi/2` का गुणा नहीं होता)।

- **लेबनीज नियम (Leibnitz Rule — समाकलन चिह्न के अंतर्गत अवकलन):**

`d/dx [ integral(g(x) to h(x)) f(t) dt ] = f(h(x)) h'(x) - f(g(x)) g'(x)`।

- **मानक निश्चित समाकलन परिणाम (याद रखने योग्य):**
- `integral(0 to pi/2) ln(sin(x)) dx = integral(0 to pi/2) ln(cos(x)) dx = -(pi / 2) * ln(2)`
- `integral(0 to pi/4) ln(1 + tan(x)) dx = (pi / 8) * ln(2)`
- `integral(0 to pi) [ x f(sin(x)) ] dx = (pi / 2) integral(0 to pi) f(sin(x)) dx`
- अनिश्चित समाकलन की रद्दीकरण ट्रिक: `integral e^x [f(x) + f'(x)] dx = e^x f(x) + C`।

4.2 अवकल समीकरण (Differential Equations) — कोटि, घात एवं हल विधियाँ

• **कोटि (Order) एवं घात (Degree):**

• किसी अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि के अवकलज की कोटि ही समीकरण की **कोटि (Order)** कहलाती है (NDA एवं CUET पाठ्यक्रम)।

• समीकरण को अवकलजों के सापेक्ष करणी (Radicals) और भिन्नात्मक घातों से मुक्त बहुपद बनाने के पश्चात उच्चतम कोटि के अवकलज की उच्चतम घात को **घात (Degree)** कहते हैं।

• **चेतावनी:** यदि अवकलज किसी त्रिकोणमितीय, लघुगणकीय या चरघातांकी फलन के कोण/कोष्ठक में फँसा हो (जैसे `sin(dy/dx)`, `ln(d^2y/dx^2)`, `e^(dy/dx)`), तो घात **अपरिभाषित (Not Defined)** होती है, परंतु कोटि सदैव परिभाषित होती है।

• **प्रथम कोटि एवं प्रथम घात का रैखिक अवकल समीकरण (Linear Differential Equation):**

• रूप 1: `dy/dx + P(x)*y = Q(x)`

• समाकलन गुणांक (Integrating Factor): `IF = e^(integral P(x) dx)`

• व्यापक हल: `y (IF) = integral [ Q(x) (IF) ] dx + C`

• रूप 2: `dx/dy + P(y)*x = Q(y)`

• समाकलन गुणांक: `IF = e^(integral P(y) dy)`

• व्यापक हल: `x (IF) = integral [ Q(y) (IF) ] dy + C`

• **समघातीय अवकल समीकरण (Homogeneous DE):** `dy/dx = f(y / x)` में `y = vx` तथा `dy/dx = v + x (dv/dx)` प्रतिस्थापित कर चरों को पृथक करें।

मॉड्यूल 5: सदिश बीजगणित (Vectors), त्रिविमीय ज्यामिति (3D Geometry) एवं प्रायिकता (Bayes Probability)

5.1 सदिश बीजगणित (Vector Algebra)

मान लीजिए `a = a1i + a2j + a3k` तथा `b = b1i + b2j + b3k`:

• **अदिश गुणनफल (Dot Product):** `a . b = |a| |b| cos(theta) = a1b1 + a2b2 + a3*b3`

• लंबवत होने की शर्त: `a . b = 0`

• सदिश `a` का सदिश `b` पर प्रक्षेप (Projection): `(a . b) / |b|`

• **सदिश गुणनफल (Cross Product):** `a x b = |a| |b| sin(theta) * n_hat`

• समांतर/संरेख होने की शर्त: `a x b = 0` अर्थात `a1/b1 = a2/b2 = a3/b3`

• त्रिभुज का क्षेत्रफल (आसन्न भुजाएँ `a, b`): `(1 / 2) * |a x b|`

• समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल (आसन्न भुजाएँ `a, b`): `|a x b|`; यदि विकर्ण `d1, d2` दिए हों तो `(1 / 2) * |d1 x d2|`।

• **लैग्रांज सर्वसमिका:** `|a x b|^2 + (a . b)^2 = |a|^2 * |b|^2`

• **अदिश त्रिक गुणनफल (Scalar Triple Product):** `[a b c] = a . (b x c)` (सारणिक से मान निकालें)।

• समांतर षट्फलक (Parallelepiped) का आयतन = `|[a b c]|` तथा चतुष्फलक (Tetrahedron) का आयतन = `(1 / 6) * |[a b c]|`।

• तीन सदिशों के समतलीय (Coplanar) होने की शर्त: `[a b c] = 0`।

• **सदिश त्रिक गुणनफल (Vector Triple Product):** `a x (b x c) = (a . c)b - (a . b)c`।

5.2 त्रिविमीय ज्यामिति (3D Geometry)

• **दिक्-कोज्याएँ (Direction Cosines — l, m, n):**

• l = cos(alpha), m = cos(beta), n = cos(gamma)

• मूल सर्वसमिकाएँ: l^2 + m^2 + n^2 = 1 अर्थात cos^2(alpha) + cos^2(beta) + cos^2(gamma) = 1 तथा sin^2(alpha) + sin^2(beta) + sin^2(gamma) = 2।

• **समतल (Plane):**

• व्यापक समीकरण: Ax + By + C*z + D = 0 (अभिलंब के दिक्-अनुपात A, B, C)।

• बिंदु (x1, y1, z1) से समतल पर लंब की लंबाई: p = |Ax1 + By1 + C*z1 + D| / sqrt(A^2 + B^2 + C^2)।

• दो समांतर समतलों Ax + By + Cz + D1 = 0 तथा Ax + By + Cz + D2 = 0 के बीच की दूरी: d = |D1 - D2| / sqrt(A^2 + B^2 + C^2)।

• **शॉर्ट-ट्रिक 16 (प्रतिबिंब एवं लंब पाद सूत्र):** बिंदु (x1, y1, z1) का समतल Ax + By + C*z + D = 0 में लंब पाद (Foot of Perpendicular) या दर्पण प्रतिबिंब (Image) (x, y, z) निकालने का एक-पंक्ति सूत्र:

(x - x1) / A = (y - y1) / B = (z - z1) / C = -k (Ax1 + By1 + Cz1 + D) / (A^2 + B^2 + C^2)

जहाँ **लंब पाद** के लिए k = 1 तथा **दर्पण प्रतिबिंब** के लिए k = 2 रखें!

• **सरल रेखा एवं विषमतलीय रेखाएँ (Skew Lines):**

• दो विषमतलीय रेखाओं r = a1 + lambdab1 तथा r = a2 + mu b2 के बीच की न्यूनतम दूरी (Shortest Distance): SD = |(a2 - a1) . (b1 x b2)| / |b1 x b2|। यदि SD = 0 हो, तो दोनों रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं (समतलीय हैं)।

5.3 प्रायिकता, बेज प्रमेय एवं द्विपद बंटन (Probability, Bayes Theorem & Binomial Distribution)

• **सप्रतिबंध प्रायिकता (Conditional Probability):** P(A | B) = P(A intersect B) / P(B) (जहाँ P(B) > 0)।

• **स्वतंत्र घटनाएँ (Independent Events):** यदि A और B स्वतंत्र हैं, तो P(A intersect B) = P(A) P(B) तथा P(A union B) = 1 - P(A') P(B')।

• **संपूर्ण प्रायिकता एवं बेज प्रमेय (Total Probability & Bayes' Theorem):**

• यदि E1, E2, ..., En परस्पर अपवर्जी और निःशेष घटनाएँ हों और A कोई घटित घटना हो, तो संपूर्ण प्रायिकता:

P(A) = sum(k = 1 to n) [P(Ek) * P(A | Ek)]

• बेज प्रमेय (कारण की पश्च प्रायिकता):

P(Ei | A) = [P(Ei) P(A | Ei)] / [sum(k = 1 to n) (P(Ek) P(A | Ek))]

• **द्विपद प्रायिकता बंटन B(n, p):**

• यदि सफलता की प्रायिकता p और असफलता की प्रायिकता q = 1 - p हो, तो n परीक्षणों में ठीक r सफलताओं की प्रायिकता: P(X = r) = nCr p^r q^(n - r)।

• माध्य (Mean): mu = n p, प्रसरण (Variance): sigma^2 = n p q, मानक विचलन (Standard Deviation): sigma = sqrt(n p q)। सदैव ध्यान रखें कि द्विपद बंटन में Mean > Variance (npq > npq) होता है!

अभ्यास प्रश्न #1 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 1. [UPSC NDA Paper-1 2024] यदि [(1 + i) / (1 - i)]^n = 1 है, जहाँ i = sqrt(-1), तो धनात्मक पूर्णांक n का न्यूनतम मान क्या है?

- (A) 2
- (B) 4
- (C) 8
- (D) 1

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

हर का परिमेयकरण करने पर: `(1 + i) / (1 - i) = (1 + i)^2 / [(1 - i)(1 + i)] = (1 + i^2 + 2i) / (1 + 1) = (2*i) / 2 = i`। अतः समीकरण `i^n = 1` बन जाता है। चूंकि `i^1 = i`, `i^2 = -1`, `i^3 = -i` तथा `i^4 = 1`, इसलिए न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक `n = 4` है (UPSC NDA परीक्षा संदर्भ)।

अभ्यास प्रश्न #2 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 2. `[UPSC NDA Paper-1 2023]` यदि `omega` इकाई का एक अवास्तविक घनमूल है, तो `(1 - omega + omega^2)^5 + (1 + omega - omega^2)^5` का मान क्या है?

- (A) 16
- (B) -16
- (C) 32
- (D) -32

सही उत्तर: (C)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

सर्वसमिका `1 + omega + omega^2 = 0` से `1 + omega^2 = -omega` तथा `1 + omega = -omega^2`। इन्हें व्यंजक में रखने पर: `(-2omega)^5 + (-2omega^2)^5 = -32 (omega^5 + omega^10)`। चूंकि `omega^3 = 1`, इसलिए `omega^5 = omega^2` और `omega^10 = omega`। अतः मान `= -32` (omega^2 + omega) = -32 * (-1) = 32।

अभ्यास प्रश्न #3 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 3. `[Air Force Group-X 2024]` सम्मिश्र संख्या `z = -5 + 12*i` का वर्गमूल क्या है?

- (A) `+/-(2 + 3*i)`
- (B) `+/-(3 + 2*i)`
- (C) `+/-(2 - 3*i)`
- (D) `+/-(3 - 2*i)`

सही उत्तर: (A)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

यहाँ `a = -5`, `b = 12` तथा `|z| = sqrt((-5)^2 + 12^2) = sqrt(25 + 144) = 13`। 1D वर्गमूल शॉर्ट-ट्रिक से: `sqrt(a + ib) = +/- [ sqrt((|z| + a)/2) + i sign(b) sqrt((|z| - a)/2) ] = +/- [ sqrt((13 - 5)/2) + i sqrt((13 + 5)/2) ] = +/- [ sqrt(4) + i sqrt(9) ] = +/-(2 + 3i)` (Air Force परीक्षा संदर्भ)।

अभ्यास प्रश्न #4 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 4. `[CUET UG 2024]` सम्मिश्र संख्या `z = -1 - i*sqrt(3)` का मुख्य कोणांक (`Principal Argument`) क्या है?

- (A) `2*pi / 3`

- (B) `-pi / 3`
- (C) `-2*pi / 3`
- (D) `4*pi / 3`

सही उत्तर: (C)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

यहाँ `x = -1 < 0` तथा `y = -sqrt(3) < 0`, अतः बिंदु तृतीय चतुर्थांश में स्थित है। न्यूनकोण `alpha = arctan(|y / x|) = arctan(sqrt(3) / 1) = pi / 3`। तृतीय चतुर्थांश में मुख्य कोणांक `Arg(z) = -(pi - alpha) = -(pi - pi/3) = -2*pi / 3` (CUET UG संदर्भ)।

अभ्यास प्रश्न #5 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 5. `[UPSC NDA Paper-1 2025]` यदि `|z - 4/z| = 2` हो, तो `|z|` का अधिकतम मान क्या होगा?

- (A) `sqrt(5) - 1`
- (B) `sqrt(5) + 1`
- (C) `2 + sqrt(5)`
- (D) `sqrt(3) + 1`

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

त्रिभुज असमिका से: `|z| - 4/|z| <= |z - 4/z| = 2`। मान लीजिए `|z| = r`, तो `r^2 - 2r - 4 <= 0`। द्विघात सूत्र से मूल `r = [2 +/- sqrt(4 - 4 1*(-4))] / 2 = 1 +/- sqrt(5)`। चूंकि `r > 0`, अतः `|z|` का अधिकतम मान `sqrt(5) + 1` है।

अभ्यास प्रश्न #6 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 6. `[UPSC NDA Paper-1 2022]` यदि द्विघात समीकरण `3x^2 - kx + 6 = 0` का एक मूल दूसरे मूल का दोगुना है (`k > 0`), तो `k` का मान क्या है?

- (A) 6
- (B) 9
- (C) 12
- (D) 8

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

शॉर्ट-ट्रिक सूत्र `2b^2 = 9ac` में `a = 3`, `b = -k`, `c = 6` रखने पर: `2 (-k)^2 = 9 3 6 => 2 * k^2 = 162 => k^2 = 81 => k = 9` (क्योंकि `k > 0`)।

अभ्यास प्रश्न #7 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 7. `[Navy SSR 2024]` यदि समीकरण `(a - b)x^2 + (b - c)x + (c - a) = 0` के दोनों मूल बराबर हैं, तो `a, b, c` किस श्रेणी में हैं?

- (A) समांतर श्रेणी (AP)
- (B) गुणोत्तर श्रेणी (GP)
- (C) हरात्मक श्रेणी (HP)
- (D) इनमें से कोई नहीं

सही उत्तर: (A)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

यहाँ गुणांकों का योग `(a - b) + (b - c) + (c - a) = 0` है, इसलिए एक मूल `1` और दूसरा मूल `(c - a) / (a - b)` है। चूंकि दोनों मूल बराबर हैं, अतः `(c - a) / (a - b) = 1` => `c - a = a - b` => `2*a = b + c`, अर्थात `b, a, c` (या सममित रूप से गुणांक संबंध) समांतर श्रेणी (AP) में हैं।

अभ्यास प्रश्न #8 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 8. `[UPSC NDA Paper-1 2024]` यदि `alpha` और `beta` समीकरण `x^2 - 2*x + 4 = 0` के मूल हैं, तो `alpha^6 + beta^6` का मान क्या है?

- (A) 64
- (B) 128
- (C) -128
- (D) 256

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

`x = [2 +/- sqrt(4 - 16)] / 2 = 1 +/- isqrt(3) = 2 [cos(pi/3) +/- isin(pi/3)]`। डी-मॉइवर प्रमेय से: `alpha^6 + beta^6 = 2^6` [cos(6pi/3) + isin(6pi/3) + cos(6pi/3) - isin(6pi/3)] = 64 2 cos(2pi) = 128 1 = 128।

अभ्यास प्रश्न #9 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 9. `[TGT/PGT Maths 2023]` वास्तविक संख्या `x` के लिए व्यंजक `(x^2 - x + 1) / (x^2 + x + 1)` का परिसर (Range) क्या है?

- (A) `[1/3, 3]`
- (B) `[-1/3, 3]`
- (C) `[0, 3]`
- (D) `[1/2, 2]`

सही उत्तर: (A)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

मान लीजिए `y = (x^2 - x + 1) / (x^2 + x + 1)` => `(y - 1)x^2 + (y + 1)x + (y - 1) = 0`। चूंकि `x` वास्तविक है, इसलिए विविक्तकर `D >= 0` => `(y + 1)^2 - 4(y - 1)^2 >= 0` => `(y + 1 - 2` y + 2) (y + 1 + 2y - 2) >= 0 => `(3 - y) (3y - 1) >= 0` => `(y - 3) (3y - 1) <= 0` => `1/3 <= y <= 3`।

अभ्यास प्रश्न #10 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 10. `[CUET UG 2025]` शब्द `'LUCKNOW'` के अक्षरों से ऐसे कितने 7-अक्षरीय शब्द बनाए जा सकते हैं जिनमें सभी स्वर (Vowels) एक साथ रहें?

- (A) 720
- (B) 1440
- (C) 2520
- (D) 5040

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

शब्द 'LUCKNOW' में कुल 7 भिन्न अक्षर हैं, जिनमें 2 स्वर (U, O) और 5 व्यंजन (L, C, K, N, W) हैं। दोनों स्वरों को एक बंडल (UO) मानने पर कुल इकाइयाँ = 5 + 1 = 6। इन्हें व्यवस्थित करने के तरीके = 6! = 720 और स्वरों के आपस में व्यवस्थित होने के तरीके = 2! = 2। अतः कुल शब्द = 720 * 2 = 1440।

अभ्यास प्रश्न #11 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 11. [UPSC NDA Paper-1 2023] यदि nC12 = nC8 है, तो 22Cn का मान क्या होगा?

- (A) 210
- (B) 231
- (C) 252
- (D) 190

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

प्रगुण nCx = nCy => n = x + y से: n = 12 + 8 = 20। अब 22Cn = 22C20 = 22C2 = (22 21) / (2 1) = 11 * 21 = 231।

अभ्यास प्रश्न #12 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 12. [Air Force Group-X 2023] एक समतल में 12 बिंदु हैं जिनमें से 5 बिंदु एक ही सरल रेखा (सरेख) पर स्थित हैं। इन बिंदुओं को मिलाकर कुल कितने त्रिभुज बनाए जा सकते हैं?

- (A) 220
- (B) 210
- (C) 215
- (D) 185

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

शॉर्ट-ट्रिक सूत्र Triangles = nC3 - mC3 में n = 12 तथा m = 5 रखने पर: 12C3 - 5C3 = [(12 11 10) / (3 2 1)] - [(5 4 3) / (3 2 1)] = 220 - 10 = 210।

अभ्यास प्रश्न #13 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 13. [UPSC NDA Paper-1 2025] 5 पत्रों को 5 संबोधित लिफाफों में यादृच्छिक रूप से रखा जाता है। कितने तरीकों से कोई भी पत्र अपने सही लिफाफे में नहीं जाएगा?

- (A) 44
- (B) 9
- (C) 60
- (D) 24

सही उत्तर: (A)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

अव्यवस्था प्रमेय (Derangement Formula) से n = 5 के लिए: D(5) = 5! [1/2! - 1/3! + 1/4! - 1/5!] = 120 [1/2 - 1/6 + 1/24 - 1/120] = 60 - 20 + 5 - 1 = 44।

अभ्यास प्रश्न #14 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 14. **[CUET UG 2024]** `(2*x^2 - 1/x)^12` के द्विपद प्रसार में `x` से स्वतंत्र पद (अचर पद) कौन-सा है?

- (A) 7वाँ पद
- (B) 8वाँ पद
- (C) 9वाँ पद
- (D) 10वाँ पद

सही उत्तर: (C)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

`(ax^p + b/x^q)^n` में स्वतंत्र पद हेतु शॉर्ट-ट्रिक: `r = (n` p) / (p + q)। यहाँ `n = 12, p = 2, q = 1`, अतः `r = (12 * 2) / (2 + 1) = 24 / 3 = 8`। इसलिए स्वतंत्र पद `T_(r+1) = T_(8+1) = 9वाँ पद` है।

अभ्यास प्रश्न #15 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 15. **[Navy SSR 2025]** `(1 + 2*x - x^2)^6` के प्रसार में सभी गुणांकों का योग क्या है?

- (A) 1
- (B) 64
- (C) 729
- (D) 0

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

किसी भी बहुपद या द्विपद प्रसार में सभी गुणांकों का योग निकालने के लिए सभी चरों के स्थान पर `1` रखते हैं। यहाँ `x = 1` रखने पर: `(1 + 2*(1) - (1)^2)^6 = (2)^6 = 64`।

अभ्यास प्रश्न #16 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 16. **[UPSC NDA Paper-1 2024]** `(1 + x)^18` के प्रसार में `(2*r + 4)` वें और `(r - 2)` वें पदों के गुणांक बराबर हैं (`r > 2`), तो `r` का मान क्या है?

- (A) 6
- (B) 8
- (C) 4
- (D) 7

सही उत्तर: (A)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

`T_(2r+4)` का गुणांक `= 18C(2r + 3)` तथा `T_(r-2)` का गुणांक `= 18C(r - 3)`। द्विपद प्रगुण `nCx = nCy => x + y = n` से: `(2` r + 3) + (r - 3) = 18 => 3*r = 18 => r = 6।

अभ्यास प्रश्न #17 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 17. **[UPSC NDA Paper-1 2024]** यदि `A` एक `3 x 3` कोटि का वर्ग आव्यूह है और `|A| = 5` है, तो `|adj(A)|` का मान क्या होगा?

- (A) 5

- (B) 25
- (C) 125
- (D) 15

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

सूत्र `|adj(A)| = |A|^(n - 1)` में कोटि `n = 3` तथा `|A| = 5` रखने पर: `|adj(A)| = 5^(3 - 1) = 5^2 = 25`।

अभ्यास प्रश्न #18 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 18. `[CUET UG 2024]` यदि `A` कोटि `3 x 3` का एक विषम सममित आव्यूह (Skew-Symmetric Matrix) है, तो सारणिक `|A|` का मान सदैव क्या होता है?

- (A) 1
- (B) -1
- (C) 0
- (D) अनिर्धारित

सही उत्तर: (C)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

विषम सममित आव्यूह के लिए `A^T = -A`। दोनों पक्षों का सारणिक लेने पर `|A^T| = |-A| = (-1)^3 |A| = -|A|`। चूंकि `|A^T| = |A|`, अतः `|A| = -|A| => 2 |A| = 0 => |A| = 0`।

अभ्यास प्रश्न #19 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 19. `[Air Force Group-X 2025]` यदि `A = [[cos(theta), -sin(theta)], [sin(theta), cos(theta)]]` है, तो `A^T + A = I_2` होने पर `theta` का मुख्य मान क्या है?

- (A) `pi / 6`
- (B) `pi / 4`
- (C) `pi / 3`
- (D) `pi / 2`

सही उत्तर: (C)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

`A^T + A = [[2cos(theta), 0], [0, 2cos(theta)]] = [[1, 0], [0, 1]]`। तुलना करने पर `2*cos(theta) = 1 => cos(theta) = 1/2 => theta = pi / 3`।

अभ्यास प्रश्न #20 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 20. `[UPSC NDA Paper-1 2023]` यदि `A` कोटि 3 का व्युत्क्रमणीय आव्यूह है और `|A| = 4` है, तो `|2 * A^(-1)|` का मान क्या है?

- (A) 2
- (B) 1/2
- (C) 8
- (D) 4

सही उत्तर: (A)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

प्रगुण `|k B| = k^n |B|` तथा `|A^(-1)| = 1 / |A|` से: `|2 A^(-1)| = 2^3 |A^(-1)| = 8 * (1 / 4) = 2`।

अभ्यास प्रश्न #21 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 21. `[TGT/PGT Maths 2024]` आव्यूह `A = [[1, 4], [2, 3]]` के आइगेन मान (Eigenvalues) क्या हैं?

- (A) `5, -1`
- (B) `4, 1`
- (C) `3, 2`
- (D) `6, -2`

सही उत्तर: (A)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

अभिलाक्षणिक समीकरण `lambda^2 - tr(A)lambda + |A| = 0`। यहाँ `tr(A) = 1 + 3 = 4` तथा `|A| = (1` 3 - 42) = 3 - 8 = -5। अतः `lambda^2 - 4` lambda - 5 = 0 => (lambda - 5)*(lambda + 1) = 0 => lambda = 5, -1।

अभ्यास प्रश्न #22 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 22. `[UPSC NDA Paper-1 2024]` वृत्त `x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0` की त्रिज्या क्या है?

- (A) 5 इकाई
- (B) 6 इकाई
- (C) 7 इकाई
- (D) 4 इकाई

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

मानक समीकरण से तुलना करने पर `2g = -6 => g = -3`, `2` f = 8 => f = 4 तथा `c = -11`। त्रिज्या `r = sqrt(g^2 + f^2 - c) = sqrt((-3)^2 + 4^2 - (-11)) = sqrt(9 + 16 + 11) = sqrt(36) = 6` इकाई।

अभ्यास प्रश्न #23 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 23. `[Air Force Group-X 2024]` परवलय `y^2 = 16*x` की नाभि (Focus) और नियता (Directrix) का समीकरण क्रमशः क्या है?

- (A) `(4, 0)` और `x = -4`
- (B) `(-4, 0)` और `x = 4`
- (C) `(0, 4)` और `y = -4`
- (D) `(8, 0)` और `x = -8`

सही उत्तर: (A)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

`y^2 = 4ax` से तुलना करने पर `4*a = 16 => a = 4`। अतः नाभि `(a, 0) = (4, 0)` और नियता का समीकरण `x = -a` अर्थात `x = -4` है।

अभ्यास प्रश्न #24 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 24. **[UPSC NDA Paper-1 2023]** दीर्घवृत्त $9x^2 + 25y^2 = 225$ की उत्केंद्रता (Eccentricity **e**) क्या है?

- (A) **3 / 5**
- (B) **4 / 5**
- (C) **16 / 25**
- (D) **5 / 4**

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

समीकरण को 225 से भाग देने पर: **x^2 / 25 + y^2 / 9 = 1**। यहाँ **a^2 = 25** तथा **b^2 = 9**। सूत्र **e = sqrt(1 - b^2 / a^2) = sqrt(1 - 9 / 25) = sqrt(16 / 25) = 4 / 5**।

अभ्यास प्रश्न #25 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 25. **[Navy SSR 2024]** अतिपरवलय **x^2 / 16 - y^2 / 9 = 1** के नाभिलंब (Latus Rectum) की लंबाई क्या है?

- (A) **9 / 2**
- (B) **9 / 4**
- (C) **32 / 3**
- (D) **16 / 3**

सही उत्तर: (A)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

यहाँ **a^2 = 16 => a = 4** तथा **b^2 = 9**। नाभिलंब की लंबाई **= (2 b^2) / a = (2 9) / 4 = 9 / 2**।

अभ्यास प्रश्न #26 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 26. **[TGT/PGT Maths 2023]** दो परवलयों $y^2 = 4x$ तथा $x^2 = 4$ y के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल क्या है?

- (A) **8 / 3** वर्ग इकाई
- (B) **16 / 3** वर्ग इकाई
- (C) **4 / 3** वर्ग इकाई
- (D) **32 / 3** वर्ग इकाई

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

यहाँ **4a = 4 => a = 1** तथा **4** b = 4 => b = 1। शॉर्ट-ट्रिक सूत्र **Area = (16 a b) / 3 = (16 1 1) / 3 = 16 / 3** वर्ग इकाई।

अभ्यास प्रश्न #27 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 27. **[UPSC NDA Paper-1 2025]** दीर्घवृत्त **x^2 / 36 + y^2 / 20 = 1** के नियामक वृत्त (Director Circle) का समीकरण क्या है?

- (A) **x^2 + y^2 = 16**
- (B) **x^2 + y^2 = 56**
- (C) **x^2 + y^2 = 36**

- (D) `x^2 + y^2 = 20`

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

दीर्घवृत्त `x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1` के नियामक वृत्त का समीकरण `x^2 + y^2 = a^2 + b^2` होता है। यहाँ `a^2 = 36` और `b^2 = 20`, अतः `x^2 + y^2 = 36 + 20 = 56`।

अभ्यास प्रश्न #28 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 28. `[UPSC NDA Paper-1 2024]` सीमा `lim(x -> 0) [(1 - cos(4x)) / (1 - cos(6x))]` का मान क्या है?

- (A) `2 / 3`
- (B) `4 / 9`
- (C) `9 / 4`
- (D) `16 / 81`

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

मानक शॉर्ट-ट्रिक `lim(x -> 0) [(1 - cos(mx)) / (1 - cos(nx))] = m^2 / n^2` से: यहाँ `m = 4` तथा `n = 6`, अतः मान `= 4^2 / 6^2 = 16 / 36 = 4 / 9`।

अभ्यास प्रश्न #29 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 29. `[CUET UG 2024]` सीमा `lim(x -> 0) [(e^(5x) - e^(2x)) / sin(3*x)]` का मान क्या है?

- (A) 1
- (B) 3
- (C) `7 / 3`
- (D) `5 / 3`

सही उत्तर: (A)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

एल-हॉस्पिटल नियम (अंश और हर का `x` के सापेक्ष अवकलन) लगाने पर: `lim(x -> 0) [(5e^(5x) - 2e^(2x)) / (3cos(3x))] = (51 - 21) / (3*1) = 3 / 3 = 1`।

अभ्यास प्रश्न #30 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 30. `[Air Force Group-X 2024]` सीमा `lim(x -> infinity) [(x + 6) / (x + 1)]^(x + 4)` का मान क्या है?

- (A) `e^4`
- (B) `e^5`
- (C) `e^6`
- (D) `e^2`

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

`1^infinity` शॉर्ट-ट्रिक सूत्र `lim(x -> infinity) [(x + a) / (x + b)]^(x + c) = e^(a - b)` से: यहाँ `a = 6` और `b = 1`, अतः उत्तर `= e^(6 - 1) = e^5`।

अभ्यास प्रश्न #31 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 31. `[UPSC NDA Paper-1 2023]` यदि `y = sqrt(sin(x) + sqrt(sin(x) + sqrt(sin(x) + ... infinity)))` है, तो `dy/dx` का मान क्या है?

- (A) `cos(x) / (2*y - 1)`
- (B) `sin(x) / (2*y - 1)`
- (C) `cos(x) / (2*y + 1)`
- (D) `-cos(x) / (2*y - 1)`

सही उत्तर: (A)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर `y^2 = sin(x) + y` => `y^2 - y = sin(x)`। `x` के सापेक्ष अवकलन करने पर: `(2y - 1) (dy/dx) = cos(x)` => `dy/dx = cos(x) / (2*y - 1)`।

अभ्यास प्रश्न #32 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 32. `[CUET UG 2025]` फलन `f(x) = |x - 2| + |x - 5|` के संदर्भ में बिंदु `x = 2` तथा `x = 5` पर कौन-सा कथन सत्य है?

- (A) फलन संतत है तथा अवकलनीय भी है
- (B) फलन संतत है परंतु अवकलनीय नहीं है
- (C) फलन न तो संतत है और न ही अवकलनीय
- (D) फलन अवकलनीय है परंतु संतत नहीं है

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

मापांक फलनों का योग सर्वत्र संतत होता है, परंतु अपने कोणीय बिंदुओं (`x = 2` और `x = 5`) पर बायाँ अवकलज (LHD) और दायाँ अवकलज (RHD) भिन्न होने के कारण अवकलनीय नहीं होता (जैसे `x = 2` पर `LHD = -2`, `RHD = 0`)।

अभ्यास प्रश्न #33 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 33. `[UPSC NDA Paper-1 2024]` फलन `f(x) = 3sin(x) + 4cos(x) + 10` का अधिकतम और न्यूनतम मान क्रमशः क्या है?

- (A) 15 और 5
- (B) 17 और 3
- (C) 10 और 5
- (D) 15 और -5

सही उत्तर: (A)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

सूत्र `c +/- sqrt(a^2 + b^2)` से: यहाँ `a = 3, b = 4, c = 10` तथा `sqrt(3^2 + 4^2) = 5`। अतः अधिकतम मान `= 10 + 5 = 15` और न्यूनतम मान `= 10 - 5 = 5`।

अभ्यास प्रश्न #34 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 34. **[TGT/PGT Maths 2024]** अंतराल **(0, infinity)** में फलन **f(x) = x^(1/x)** किस बिंदु पर अपना उच्चिष्ठ मान प्राप्त करता है?

- (A) **x = 1**
- (B) **x = e**
- (C) **x = 1/e**
- (D) **x = e^2**

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

ln(y) = ln(x) / x। अवकलन करने पर **(1/y)*(dy/dx) = (1 - ln(x)) / x^2**। उच्चिष्ठ/निम्निष्ठ हेतु **dy/dx = 0 => 1 - ln(x) = 0 => ln(x) = 1 => x = e**। **x = e** पर द्वितीय अवकलज ऋणात्मक होता है, अतः **x = e** पर उच्चिष्ठ मान **e^(1/e)** प्राप्त होता है।

अभ्यास प्रश्न #35 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 35. **[Navy SSR 2024]** यदि किसी वृत्त की त्रिज्या **3 cm/s** की एकसमान दर से बढ़ रही है, तो जब त्रिज्या **10 cm** है तब वृत्त के क्षेत्रफल के बढ़ने की दर क्या होगी?

- (A) **30*pi cm^2/s**
- (B) **60*pi cm^2/s**
- (C) **100*pi cm^2/s**
- (D) **20*pi cm^2/s**

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

वृत्त का क्षेत्रफल **A = pi *r*^2**। ***t*** के सापेक्ष अवकलन करने पर: ***dA/dt* = 2** pi *r* (dr/dt)। यहाँ **r = 10 cm** तथा **dr/dt = 3 cm/s** रखने पर: **dA/dt = 2 *pi* 10 3 = 60pi cm^2/s**।

अभ्यास प्रश्न #36 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 36. **[UPSC NDA Paper-1 2025]** निश्चित समाकलन
I = integral(0 to pi/2) [sqrt(sin(x)) / (sqrt(sin(x)) + sqrt(cos(x)))] dx का मान क्या है?

- (A) **pi / 2**
- (B) **pi / 4**
- (C) **pi / 8**
- (D) **0**

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

किंग्स प्रॉपर्टी **integral(0 to a) f(x) dx = integral(0 to a) f(a - x) dx** लगाने पर **I = integral(0 to pi/2) [sqrt(cos(x)) / (sqrt(cos(x)) + sqrt(sin(x)))] dx**। दोनों समीकरणों को जोड़ने पर **2*I = integral(0 to pi/2) 1 dx = pi / 2 => I = pi / 4**।

अभ्यास प्रश्न #37 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 37. **[Air Force Group-X 2024]** अनिश्चित समाकलन **integral [e^x * (tan(x) + sec^2(x))] dx** का मान क्या है?

- (A) **e^x * sec(x) + C**
- (B) **e^x * tan(x) + C**
- (C) **e^x * sec^2(x) + C**
- (D) **e^x * cot(x) + C**

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

मानक रद्दीकरण सूत्र **integral e^x [f(x) + f'(x)] dx = e^x f(x) + C** में **f(x) = tan(x)** लेने पर **f'(x) = sec^2(x)**। अतः सीधा समाकलन **= e^x * tan(x) + C**।

अभ्यास प्रश्न #38 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 38. **[UPSC NDA Paper-1 2023]** समाकलन **integral(-pi/2 to pi/2) [x^3 * cos(x) + tan^5(x) + 1] dx** का मान क्या है?

- (A) **0**
- (B) **pi**
- (C) **2*pi**
- (D) **pi / 2**

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

अंतराल **[-pi/2, pi/2]** सममित है। यहाँ **x^3 cos(x)** विषम फलन है और **tan^5(x)** भी विषम फलन है, इसलिए इन दोनों का समाकलन **0** हो जाएगा। केवल अचर पद **1** (सम फलन) बचेगा: **integral(-pi/2 to pi/2) 1 dx = 2** (pi / 2) = pi।

अभ्यास प्रश्न #39 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 39. **[CUET UG 2024]** वैलिस सूत्र द्वारा **integral(0 to pi/2) sin^6(x) dx** का मान क्या है?

- (A) **5*pi / 32**
- (B) **3*pi / 16**
- (C) **5*pi / 16**
- (D) **15*pi / 64**

सही उत्तर: (A)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

चूंकि **n = 6** एक सम संख्या है, अतः वैलिस सूत्र से: **I = [(6 - 1)/6] [(6 - 3)/4] [(6 - 5)/2] (pi / 2) = (5 / 6) (3 / 4) (1 / 2) (pi / 2) = (5 * pi) / 32**।

अभ्यास प्रश्न #40 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 40. **[UPSC NDA Paper-1 2024]** समाकलन **integral(-1 to 2) |x - 1| dx** का मान क्या है?

- (A) **3 / 2**
- (B) **5 / 2**

- (C) `2`
- (D) `7 / 2`

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

कोणीय बिंदु `x = 1` पर सीमा तोड़ने पर: `I = integral(-1 to 1) (1 - x) dx + integral(1 to 2) (x - 1) dx = [x - x^2/2](-1 to 1) + [x^2/2 - x](1 to 2) = [(1 - 1/2) - (-1 - 1/2)] + [(2 - 2) - (1/2 - 1)] = 2 + 1/2 = 5 / 2`।

अभ्यास प्रश्न #41 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 41. `[CUET UG 2025]` अवकल समीकरण `[1 + (dy/dx)^2]^(3/2) = k * (d^2y / dx^2)` की कोटि (Order) और घात (Degree) क्रमशः क्या हैं?

- (A) कोटि 2, घात 2
- (B) कोटि 2, घात 3
- (C) कोटि 3, घात 2
- (D) कोटि 2, घात 1

सही उत्तर: (A)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

भिन्नात्मक घात `3/2` हटाने के लिए दोनों पक्षों का वर्ग करने पर: `[1 + (dy/dx)^2]^3 = k^2 * (d^2y / dx^2)^2`। उच्चतम अवकलज `d^2y / dx^2` है जिसकी कोटि `2` है और उसकी उच्चतम घात `2` है। अतः कोटि `= 2`, घात `= 2`।

अभ्यास प्रश्न #42 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 42. `[UPSC NDA Paper-1 2023]` अवकल समीकरण `d^2y / dx^2 + cos(dy/dx) = 0` की कोटि और घात क्या हैं?

- (A) कोटि 2, घात 1
- (B) कोटि 2, घात अपरिभाषित
- (C) कोटि अपरिभाषित, घात 2
- (D) कोटि 1, घात 2

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

उच्चतम अवकलज `d^2y / dx^2` है, इसलिए कोटि `= 2`। परंतु `dy/dx` त्रिकोणमितीय फलन `cos(...)` के अंदर उपस्थित है, जिससे समीकरण को अवकलजों में बहुपद के रूप में नहीं लिखा जा सकता। अतः घात **अपरिभाषित (Not Defined)** है।

अभ्यास प्रश्न #43 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 43. `[Air Force Group-X 2025]` रैखिक अवकल समीकरण `x (dy/dx) + 2y = x^2` (`x > 0`) का समाकलन गुणांक (`Integrating Factor - IF`) क्या है?

- (A) `x`
- (B) `x^2`
- (C) `2*x`
- (D) `1 / x^2`

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

समीकरण को `x` से भाग देकर मानक रूप `dy/dx + (2/x)y = x` में लिखने पर `P(x) = 2 / x`। अतः `IF = e^(integral (2/x) dx) = e^(2 ln(x)) = e^(ln(x^2)) = x^2`।

अभ्यास प्रश्न #44 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 44. `[Navy SSR 2024]` उन सभी वृत्तों के कुल का अवकल समीकरण क्या है जिनका केंद्र मूलबिंदु `(0, 0)` पर है?

- (A) `x + y * (dy/dx) = 0`
- (B) `x - y * (dy/dx) = 0`
- (C) `y + x * (dy/dx) = 0`
- (D) `dy/dx = x * y`

सही उत्तर: (A)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

केंद्र `(0, 0)` वाले वृत्तों का समीकरण `x^2 + y^2 = r^2` (जहाँ `r` स्वेच्छ अचर है)। `x` के सापेक्ष अवकलन करने पर: `2x + 2y(dy/dx) = 0 => x + y(dy/dx) = 0`।

अभ्यास प्रश्न #45 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 45. `[TGT/PGT Maths 2024]` अवकल समीकरण `dy/dx = e^(x - y) + x^2 * e^(-y)` का व्यापक हल क्या है?

- (A) `e^y = e^x + (x^3 / 3) + C`
- (B) `e^(-y) = e^x + (x^3 / 3) + C`
- (C) `y = e^x + (x^3 / 3) + C`
- (D) `e^y = e^(-x) + (x^3 / 3) + C`

सही उत्तर: (A)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

दिया है `dy/dx = e^(-y) * (e^x + x^2)`। चरों को पृथक करने पर: `e^y dy = (e^x + x^2) dx`। दोनों पक्षों का समाकलन करने पर: `e^y = e^x + (x^3 / 3) + C`।

अभ्यास प्रश्न #46 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 46. `[UPSC NDA Paper-1 2024]` यदि सदिश `a = 2i + lambdaj + k` और `b = 4i - 2j - 2*k` परस्पर लंबवत हैं, तो `lambda` का मान क्या है?

- (A) 2
- (B) 3
- (C) 4
- (D) -3

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

दो सदिशों के लंबवत होने की शर्त `a . b = 0` से: `(2)(4) + (lambda)(-2) + (1)(-2) = 0 => 8 - 2lambda - 2 = 0 => 2*lambda = 6 => lambda = 3`।

अभ्यास प्रश्न #47 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 47. **[CUET UG 2024]** सदिश **a = 2*i* + 3j + 2*k*** का सदिश ***b* = *i* + 2** j + k पर प्रक्षेप (Projection) क्या है?

- (A) **10 / sqrt(6)**
- (B) **10 / sqrt(17)**
- (C) **5 / sqrt(6)**
- (D) **8 / sqrt(6)**

सही उत्तर: (A)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

सदिश **a** का **b** पर प्रक्षेप **= (a . b) / |b| = [(21 + 32 + 2*1)] / sqrt(1^2 + 2^2 + 1^2) = (2 + 6 + 2) / sqrt(6) = 10 / sqrt(6)**।

अभ्यास प्रश्न #48 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 48. **[UPSC NDA Paper-1 2025]** यदि **|a| = 3**, **|b| = 4** और **|a . b| = 6** है, तो **|a x b|** का मान क्या है?

- (A) **6**
- (B) **6*sqrt(3)**
- (C) **3*sqrt(6)**
- (D) **12**

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

लैग्रांज सर्वसमिका **|a x b|^2 + (a . b)^2 = |a|^2 |*b*|^2** से: **|*a x b*|^2 + 6^2 = 3^2** 4^2 => |a x b|^2 = 144 - 36 = 108 => |a x b| = sqrt(108) = 6*sqrt(3)।

अभ्यास प्रश्न #49 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 49. **[Air Force Group-X 2024]** यदि तीन सदिश **2*i* - *j* + *k***, ***i* + 2** j - 3*k* और **3** i + p*j* + 5k समतलीय (Coplanar) हैं, तो **p** का मान क्या है?

- (A) -4
- (B) 4
- (C) -2
- (D) 2

सही उत्तर: (A)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

समतलीय होने की शर्त **[a b c] = 0** अर्थात सारणिक **det([[2, -1, 1], [1, 2, -3], [3, p, 5]]) = 0**। प्रथम पंक्ति से प्रसार करने पर: **2(10 + 3p) - (-1)(5 + 9) + 1(p - 6) = 0 => 20 + 6*p* + 14 + *p* - 6 = 0 => 7p + 28 = 0 => p = -4**।

अभ्यास प्रश्न #50 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 50. **[UPSC NDA Paper-1 2023]** यदि तीन मात्रक सदिश **a, b, c** इस प्रकार हैं कि **a + b + c = 0**, तो **a.b + b.c + c.a** का मान क्या है?

- (A) **0**

- (B) -3 / 2
- (C) 3 / 2
- (D) -1

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

|a + b + c|^2 = 0 => |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2(a.b + b.c + c.a) = 0। चूंकि |a| = |b| = |c| = 1, अतः 1 + 1 + 1 + 2(a.b + b.c + c.a) = 0 => a.b + b.c + c.a = -3 / 2।

अभ्यास प्रश्न #51 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 51. [CUET UG 2024] यदि कोई रेखा X, Y तथा Z-अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ क्रमशः alpha, beta, gamma कोण बनाती है, तो sin^2(alpha) + sin^2(beta) + sin^2(gamma) का मान क्या है?

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 0

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

दिक्-कोज्या सर्वसमिका cos^2(alpha) + cos^2(beta) + cos^2(gamma) = 1 से: (1 - sin^2(alpha)) + (1 - sin^2(beta)) + (1 - sin^2(gamma)) = 1 => sin^2(alpha) + sin^2(beta) + sin^2(gamma) = 3 - 1 = 2।

अभ्यास प्रश्न #52 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 52. [UPSC NDA Paper-1 2024] बिंदु (1, 2, 3) की समतल 2x - y + 2z + 3 = 0 से लंबवत दूरी क्या है?

- (A) 2 इकाई
- (B) 3 इकाई
- (C) 4 इकाई
- (D) 1 इकाई

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

लंब की लंबाई p = |Ax1 + By1 + Cz1 + D| / sqrt(A^2 + B^2 + C^2) = |2(1) - 1(2) + 2(3) + 3| / sqrt(2^2 + (-1)^2 + 2^2) = |2 - 2 + 6 + 3| / sqrt(9) = 9 / 3 = 3 इकाई।

अभ्यास प्रश्न #53 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 53. [TGT/PGT Maths 2024] दो समांतर समतलों 2x - y + 2z - 6 = 0 और 4x - 2y + 4*z + 12 = 0 के बीच की दूरी क्या है?

- (A) 2 इकाई
- (B) 4 इकाई
- (C) 6 इकाई
- (D) 3 इकाई

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

दूसरे समीकरण को 2 से भाग देकर गुणांक समान करने पर: $2x - y + 2z + 6 = 0$। अब दूरी $d = |D1 - D2| / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = |-6 - 6| / \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 12 / 3 = 4$ इकाई।

अभ्यास प्रश्न #54 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 54. **[UPSC NDA Paper-1 2025]** समतल $x + y + z = 6$ में बिंदु $(1, 1, 1)$ का दर्पण प्रतिबिंब (Mirror Image) क्या है?

- (A) $(2, 2, 2)$
- (B) $(3, 3, 3)$
- (C) $(4, 4, 4)$
- (D) $(0, 0, 0)$

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

प्रतिबिंब की शॉर्ट-ट्रिक से: $(x - 1)/1 = (y - 1)/1 = (z - 1)/1 = -2(1 + 1 + 1 - 6) / (1^2 + 1^2 + 1^2) = -2(-3) / 3 = 2$। अतः $x = 1 + 2 = 3, y = 3, z = 3$, अर्थात प्रतिबिंब $(3, 3, 3)$ है।

अभ्यास प्रश्न #55 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 55. **[Navy SSR 2025]** गोलक (Sphere) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8*z - 7 = 0$ की त्रिज्या क्या है?

- (A) 5 इकाई
- (B) 6 इकाई
- (C) 7 इकाई
- (D) 4 इकाई

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

केंद्र $(-u, -v, -w) = (2, -3, 4)$ तथा $d = -7$। त्रिज्या $R = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d} = \sqrt{4 + 9 + 16 - (-7)} = \sqrt{36} = 6$ इकाई।

अभ्यास प्रश्न #56 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 56. **[UPSC NDA Paper-1 2024]** एक समस्या को तीन छात्रों A, B और C द्वारा स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकताएँ क्रमशः $1/2$, $1/3$ और $1/4$ हैं। समस्या के हल हो जाने की प्रायिकता क्या है?

- (A) $1 / 4$
- (B) $3 / 4$
- (C) $2 / 3$
- (D) $1 / 24$

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

तीनों द्वारा हल न कर पाने की प्रायिकता: $P(A') = 1 - 1/2 = 1/2$, $P(B') = 1 - 1/3 = 2/3$, $P(C') = 1 - 1/4 = 3/4$। समस्या हल होने की प्रायिकता $= 1 - P(A')P(B')P(C') = 1 - (1/2)(2/3)(3/4) = 1 - 1/4 = 3 / 4$।

अभ्यास प्रश्न #57 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 57. **[CUET UG 2024]** यदि **P(A) = 0.6**, **P(B) = 0.4** और **P(A intersect B) = 0.24** है, तो **P(A | B)** का मान क्या है?

- (A) **0.4**
- (B) **0.6**
- (C) **0.36**
- (D) **0.5**

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

सप्रतिबंध प्रायिकता सूत्र से: **P(A | B) = P(A intersect B) / P(B) = 0.24 / 0.4 = 0.6** (यहाँ **P(A intersect B) = P(A)*P(B)** होने से दोनों घटनाएँ स्वतंत्र भी हैं)।

अभ्यास प्रश्न #58 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 58. **[UPSC NDA Paper-1 2023]** थैला-I में 3 लाल और 4 काली गेंदें हैं तथा थैला-II में 4 लाल और 3 काली गेंदें हैं। एक थैला यादृच्छया चुना जाता है और उसमें से एक लाल गेंद निकलती है। बेज प्रमेय से, इसके थैला-I से निकलने की प्रायिकता क्या है?

- (A) **3 / 7**
- (B) **4 / 7**
- (C) **1 / 2**
- (D) **3 / 4**

सही उत्तर: (A)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

P(B1) = P(B2) = 1/2। **P(R | B1) = 3/7** तथा **P(R | B2) = 4/7**। बेज प्रमेय से: **P(B1 | R) = [(1/2)(3/7)] / [(1/2)(3/7) + (1/2)*(4/7)] = 3 / (3 + 4) = 3 / 7**।

अभ्यास प्रश्न #59 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 59. **[UPSC NDA Paper-1 2024]** एक द्विपद बंटन **B(n, p)** का माध्य (Mean) 4 है और प्रसरण (Variance) 3 है। प्राचल **n** (परीक्षणों की संख्या) का मान क्या है?

- (A) 12
- (B) 16
- (C) 8
- (D) 20

सही उत्तर: (B)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

दिया है **Mean = np = 4** तथा **Variance = npq = 3**। भाग देने पर **q = 3 / 4**। चूंकि **p = 1 - q = 1 - 3/4 = 1/4**, अतः **n (1/4) = 4 => n = 16**।

अभ्यास प्रश्न #60 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 60. **[Air Force Group-X 2024]** एक निष्पक्ष सिक्के को 6 बार उछाला जाता है। ठीक 4 चित (Heads) आने की प्रायिकता क्या है?

- (A) **15 / 64**
- (B) **5 / 16**
- (C) **3 / 16**
- (D) **20 / 64**

सही उत्तर: (A)

व्याख्या (1D Step-by-Step):

द्विपद प्रायिकता सूत्र **P(X = r) = nCr *p*^*r* q^(n - r)** में **n = 6, r = 4, p = 1/2, q = 1/2** रखने पर: **P(X = 4) = 6C4 * (1/2)^6 = 15 / 64**।

क्र.सं.	अध्याय / टॉपिक	1D मास्टर सूत्र / प्रमेय	परीक्षा शॉर्ट-ट्रिक एवं अनुप्रयोग	आधिकारिक संदर्भ
1	सम्मिश्र संख्याएँ	**z = x + i*y** ; `	z	= sqrt(x^2 + y^2) **;** e^(*itheta*) = *cos*(*theta*) + *i*sin(theta)`	**[(1 + i)/(1 - i)] = i** ; **1 + omega + omega^2 = 0** ; **omega^3 = 1**	UPSC NDA पाठ्यक्रम
2	द्विघात समीकरण	**alpha + beta = -b/a** ; **alpha*beta = c/a** ; `	alpha - beta	= sqrt(D)/	a	`	यदि **a + b + c = 0**, तो मूल **1** और **c/a** ; यदि **beta = k*a**lpha*** , तो **k** b^2 = (k+1)^2ac	CUET UG गणित
3	क्रमचय एवं संचय	**nPr = n!/(n - r)!** ; **nCr = n!/[r!*(n - r)!]** ; **nCr + nC(r-1) = (n+1)Cr**	अव्यवस्था **D(4) = 9, D(5) = 44** ; बहुभुज विकर्ण **= n*(n-3)/2** ; त्रिभुज **= nC3 - mC3**	UPSC NDA Paper-1
4	द्विपद प्रमेय	**T_(r+1) = nCr *x*^(*n - r*) a^r** ; **C0 + C1 + ... + Cn = 2^n**	**(a*x*^*p* + *b*/*x*^*q*)^*n*** में स्वतंत्र पद हेतु **r = (*n* p)/(p + q)**	Air Force X पोर्टल
5	आव्यूह एवं सारणिक	`	k*A	= k^n *	A	**;**	adj(A)	=	A	^(n - 1) **;** A^(-1) = adj(A

क्र.सं.	अध्याय / टॉपिक	1D मास्टर सूत्र / प्रमेय	परीक्षा शॉर्ट-ट्रिक एवं अनुप्रयोग	आधिकारिक संदर्भ
6	शंकु परिच्छेद	वृत्त r = sqrt(g^2+f^2-c); दीर्घवृत्त e = sqrt(1 - b^2/a^2); अतिपरवलय e = sqrt(1 + b^2/a^2)	y^2 = 4ax व x^2 = 4by के बीच घिरा क्षेत्रफल = (16ab)/3	NDA Entry IAF
7	सीमा एवं अवकलन	lim(x->0) [(1-cos(mx))/(1-cos(nx))] = m^2/n^2; dy/dx = -(dF/dx)/(dF/dy)	1^infinity रूप: exp(lim g(x)(f(x)-1)); अनंत करणी dy/dx = f'(x)/(2 y - 1)	UPSC NDA पोर्टल
8	उच्चिष्ठ-निम्निष्ठ	asin(x) + bcos(x) in [-sqrt(a^2+b^2), +sqrt(a^2+b^2)]	x^(1/x) का उच्चिष्ठ x = e पर e^(1/e); a^2tan^2(x) + b^2cot^2(x) >= 2ab	CUET UG NTA
9	निश्चित समाकलन	integral(a to b) f(x) dx = integral(a to b) f(a + b - x) dx	सममित अनुपात रूप integral(a to b) [f(x)/(f(x)+f(a+b-x))] dx = (b - a)/2	UPSC NDA Paper-1
10	अवकल समीकरण	dy/dx + Py = Q => IF = e^(integral P dx); हल: y (IF) = integral Q*(IF) dx + C	यदि अवकलज sin(dy/dx) या ln(dy/dx) में हो तो घात अपरिभाषित होती है	NTA CUET UG
11	सदिश एवं 3D ज्यामिति	`	a x b	^2 + (a.b)^2 =	a	^2*	b	^2; l^2 + m^2 + n^2 = 1; SD =	(a2-a1). (b1xb2)	/
12	प्रायिकता एवं बेज प्रमेय	`P(Ei | A) = [P(Ei)*P(A | Ei)] / sum(P(Ek)*P(A | Ek)); P(X=r) = nCr p^r q^(n-r)`	द्विपद बंटन में Mean = np, Variance = npq तथा सदैव Mean > Variance	UPSC NDA पोर्टल

यह खंड संघ लोक सेवा आयोग की राष्ट्रीय रक्षा अकादमी परीक्षा (upsc.gov.in) तथा विश्वविद्यालय अनुदान आयोग / राष्ट्रीय परीक्षा एजेंसी की संयुक्त विश्वविद्यालय प्रवेश परीक्षा (www.iucacademy.com) के उच्चतर गणित पाठ्यक्रम पर आधारित है। इसमें बीजगणित, आव्यूह एवं सारणिक, त्रिकोणमिति, विश्लेषणात्मक ज्यामिति (2D एवं 3D), अवकलन एवं समाकलन कलन, अवकल समीकरण, सदिश बीजगणित तथा प्रायिकता व सांख्यिकी के महत्वपूर्ण सूत्र और विश्लेषणात्मक प्रश्न संकलित हैं।

सारणी 31.1: आव्यूह, सारणिक, सम्मिश्र संख्याएं एवं द्विघात समीकरण के मानक सूत्र एवं गुणधर्म

क्र.सं.	गणितीय उप-विषय	मानक सूत्र / प्रमेय	प्रमुख गणितीय शर्तें एवं गुणधर्म	एनडीए / सीयूईटी परीक्षा में अनुप्रयोग	आधिकारिक संदर्भ
1	आव्यूह का व्युत्क्रम एवं सहखंडज (Adjoint)	A^{-1} = (adj(A) /	A	) तथा	adj(A)
2	कैली-हैमिल्टन प्रमेय एवं अभिलाक्षणिक समीकरण		A - λ I	= 0	प्रत्येक वर्ग आव्यूह अपने अभिलाक्षणिक समीकरण को संतुष्ट करता है
3	रैखिक समीकरण निकाय की संगतता (क्रेमर नियम)	AX = B; Δ =	A		यदि Δ ≠ 0: अद्वितीय हल; यदि Δ = 0 और Δ_1 = Δ_2 = Δ_3 = 0: अनंत हल (यदि संगत हो)
4	इकाई के घनमूल (Cube Roots of Unity)	1, ω, ω^2 जहाँ ω = (-1 + i√(3) / 2)	1 + ω + ω^2 = 0 तथा ω^3 = 1; ω^{3n} + ω^{3n+1} + ω^{3n+2} = 0	उच्च घातीय सम्मिश्र व्यंजकों और सारणिकों का सरलीकरण	www.iucacademy.com
5	डी-मायवर प्रमेय एवं यूलर रूप	(\cosθ + i\sinθ)^n = cos(nθ) + isin(nθ)	z = r e^{iθ};	z_1 z_2	=

1	=	A	^{n-1}	वर्ग आव्यू n हो तथा	
2	आव्यूह की उच्च घातों (A^3, A^4) तथा A^{-1} का बहुपदीय मान ज्ञात करना	www.iucacademy.com			
3	समघाती निकाय AX=0 में अतुच्छ हल (Non-trivial solution) हेतु	A	= 0	upsc.g	
4					
5	z_1		z_2	तथा arg arg(z_	

क्र.सं.	गणितीय उप-विषय	मानक सूत्र / प्रमेय	प्रमुख गणितीय शर्तें एवं गुणधर्म	एनडीए / सीयूईटी परीक्षा में अनुप्रयोग	आधिकारिक संदर्भ			
6	द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति	ax^2 + bx + c = 0; D = b^2 - 4ac	α + β = -b/a, αβ = c/a,	α - β	= (√(D) /	a	)	उभयनिष्ठ मूलों की शर्त एवं मूलों के सममित फलनों का मान निकालना	www.i
7	द्विपद प्रमेय में व्यापक एवं मध्य पद	(x+y)^n में T_{r+1} = \binom{n}{r} x^{n-r} y^r	Σ_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n; सम एवं विषम द्विपद गुणांकों का योग = 2^{n-1}	x से स्वतंत्र पद (अचर पद) एवं महत्तम द्विपद गुणांक की पहचान	upsc.gov.in				
8	समांतर, गुणोत्तर एवं हरात्मक माध्य संबंध	A = (a+b / 2), G = √(ab), H = (2ab / a+b)	धनात्मक वास्तविक संख्याओं के लिए A ≥ G ≥ H तथा G^2 = A · H	असमिकाओं के न्यूनतम एवं अधिकतम मान ज्ञात करने में सीधा उपयोग	www.iucacademy.com				

सारणी 31.2: कलन (अवकलन, समाकलन, निश्चित समाकलन गुणधर्म एवं अवकल समीकरण)

क्र.सं.	कलन का क्षेत्र	मानक सूत्र / समाकलन सर्वसमिका	सीमाएं एवं विशेष प्रतिबंधन	परीक्षा में प्रमुख प्रश्न प्रारूप	आधिकारिक संदर्भ
1	एल-हॉस्पिटल नियम एवं अनिर्धार्य रूप	\lim_{x → a} (f(x) / g(x)) = \lim_{x → a} (f'(x) / g'(x))	केवल (0 / 0) या (∞ / ∞) रूप होने पर लागू; 1^∞ में e^{\lim g(x) [f(x)-1]}	सीमा (Limit) और सांतत्य (Continuity) में अज्ञात अचर k का मान निकालना	upsc.gov.in
2	लेबनीज नियम (समाकलन चिह्न के अंतर्गत अवकलन)	(d / dx) [∫_{φ(x)}^{\psi(x)} f(t) dt] = f(\psi(x))\psi'(x) - f(φ(x))φ'(x)	सीमाएं φ(x) और \psi(x) अवकलनीय फलन हों तथा f(t) संतत हो	समाकल समीकरणों से फलन f(x) तथा स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात करना	www.iucacademy.com
3	राजा गुणधर्म (निश्चित समाकलन प्रमेय)	∫_{a}^{b} f(x) dx = ∫_{a}^{b} f(a+b-x) dx	∫_{a}^{b} (f(x) / f(x) + f(a+b-x)) dx = (b-a / 2)	त्रिकोणमितीय एवं लघुगणकीय निश्चित समाकलनों का एक-चरणीय हल	upsc.gov.in
4	सम एवं विषम फलनों का समाकलन	∫_{-a}^{a} f(x) dx = 2∫_{0}^{a} f(x) dx (सम) या 0 (विषम)	सम फलन: f(-x) = f(x); विषम फलन: f(-x) = -f(x)	सममित अंतराल [-π/2, π/2] या [-1, 1] पर आधारित जटिल समाकलनों का शून्यीकरण	www.iucacademy.com

क्र.सं.	कलन का क्षेत्र	मानक सूत्र / समाकलन सर्वसमिका	सीमाएं एवं विशेष प्रतिबंधन	परीक्षा में प्रमुख प्रश्न प्रारूप	आधिकारिक संदर्भ
5	वॉली का सूत्र (Wallis Formula)	∫_{0}^{π/2} sin^m x cos^n x dx	([(m-1)(m-3)·s][(n-1)(n-3)·s] / (m+n)(m+n-2)·s) × k (k = π/2 यदि m,n दोनों सम हों, अन्यथा 1)	उच्च घातीय साइन-कोसाइन गुणनफलों का त्वरित निश्चित समाकलन	upsc.gov.in
6	विशिष्ट समाकलन रूप (e^x गुणनफल)	∫ e^x [f(x) + f'(x)] dx = e^x f(x) + C	खंडशः समाकलन (Integration by parts) का प्रत्यक्ष परिणाम	∫ e^x ((x-1 / x^2)) dx या ∫ e^x (tan x + \sec^2 x) dx प्रकार के प्रश्न	www.iucacademy.com
7	प्रथम कोटि का रैखिक अवकल समीकरण	(dy / dx) + P(x)y = Q(x)	समाकलन गुणांक (I.F.) = e^{∫ P(x) dx}; हल: y · (I.F.) = ∫ Q(x) · (I.F.) dx + C	वक्र कुल का समीकरण एवं प्रारंभिक मान समस्या (Initial Value Problem) हल करना	upsc.gov.in
8	परवलय एवं रेखा के मध्य घिरा क्षेत्रफल	y^2 = 4ax तथा y = mx के मध्य क्षेत्रफल = (8a^2 / 3m^3)	दो परवलयों y^2 = 4ax और x^2 = 4by के बीच क्षेत्रफल = (16ab / 3)	समाकलन के अनुप्रयोग (Area under curves) के प्रश्नों में समय की बचत	www.iucacademy.com

सारणी 31.3: शांकव परिच्छेद, त्रिविमीय ज्यामिति, सदिश बीजगणित एवं प्रायिकता वितरण

क्र.सं.	ज्यामिति / सांख्यिकी क्षेत्र	समीकरण / मानक संबंध	उत्केंद्रता (e), नाभिलंब एवं प्रमुख पैरामीटर	परीक्षा-उपयोगी विश्लेषणात्मक निष्कर्ष	आधिकारिक संदर्भ
1	परवलय (Parabola) के मानक रूप	y^2 = 4ax (दक्षिणवर्ती)	e = 1; नाभि (a, 0); नियता x = -a; नाभिलंब की लंबाई = 4a	बिंदु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा: yy_1 = 2a(x + x_1); स्पर्शता की शर्त c = a/m	upsc.gov.in
2	दीर्घवृत्त (Ellipse) के मानक गुणधर्म	(x^2 / a^2) + (y^2 / b^2) = 1 (a > b)	e = √(1 - \frac{b^2}{a^2}) < 1; नाभियां (± ae, 0); नाभिलंब = (2b^2 / a)	किसी बिंदु की दोनों नाभियों से दूरियों का योग SP + S'P = 2a (दीर्घ अक्ष)	www.iucacademy.com
3	अतिपरवलय एवं आयताकार अतिपरवलय	(x^2 / a^2) - (y^2 / b^2) = 1	e = √(1 + \frac{b^2}{a^2}) > 1; आयताकार अतिपरवलय (a=b) में e = √(2)	संयुग्मी अतिपरवलय की उत्केंद्रता e_2 हो तो (1 / e_1^2) + (1 / e_2^2) = 1	upsc.gov.in

क्र.सं.	ज्यामिति / सांख्यिकी क्षेत्र	समीकरण / मानक संबंध	उत्केंद्रता (e), नाभिलंब एवं प्रमुख पैरामीटर	परीक्षा-उपयोगी विश्लेषणात्मक निष्कर्ष	आधिकारिक संदर्भ
4	3D ज्यामिति में दिक्-कोसाइन (Direction Cosines)	l = \cosα, m = \cosβ, n = \cosγ	l^2 + m^2 + n^2 = 1 तथा sin^2α + sin^2β + sin^2γ = 2	दो रेखाओं के बीच का कोण \cosθ =	l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2
5	विषमतलीय रेखाओं (Skew Lines) की न्यूनतम दूरी	r = a_1 + λb_1 एवं r = a_2 + μb_2	d =	((a_2 - a_1) · (b_1 × b_2) /	b_1 × b_2
6	सदिश अदिश एवं सदिश त्रिक गुणनफल	[a\ b\ c] = a · (b × c)	a × (b × c) = (a · c)b - (a · b)c; लैग्रांज सर्वसमिका:	a × b	^2 + (a · b)^2 =
7	सप्रतिबंध प्रायिकता एवं बेज प्रमेय	P(A	B) = (P(A ∩ B) / P(B))	P(E_i	A) = (P(E_i) P(A
8	द्विपद प्रायिकता बंटन (Binomial Distribution)	P(X = r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}	माध्य (Mean) μ = np, प्रसरण (Variance) σ^2 = npq, मानक विचलन = √(npq)	सदैव माध्य > प्रसरण (np > npq क्योंकि 0 < q < 1) तथा p + q = 1	www.iucacademy.com

उच्च-स्तरीय बहुविकल्पीय प्रश्न एवं विस्तृत व्याख्या (खंड 31: प्रश्न 1 से 20)

अभ्यास प्रश्न #1 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 1. यदि A एक 3 × 3 कोटि का व्युत्क्रमणीय आव्यूह (Invertible Matrix) है तथा इसके सारणिक का मान |A| = 5 है, तो |adj(2A)| का मान क्या होगा?

- (क) 400
- (ख) 1600
- (ग) 100
- (घ) 800
- **सही उत्तर:** (ख) 1600

• **विस्तृत व्याख्या:** किसी n × n आव्यूह M के लिए |adj(M)| = |M|^{n-1} तथा |kA| = k^n |A| होता है (upsc.gov.in)। यहाँ n = 3 और M = 2A है। अतः |2A| = 2^3 |A| = 8 × 5 = 40। इसलिए |adj(2A)| = |2A|^{3-1} = (40)^2 = 1600।

अभ्यास प्रश्न #2 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 2. यदि ω (ω ≠ 1) इकाई का एक काल्पनिक घनमूल है, तो व्यंजक (1 - ω + ω^2)^5 + (1 + ω - ω^2)^5 का मान क्या होगा?

• (क) 32

• (ख) -32

• (ग) 16

• (घ) 0

• **सही उत्तर:** (क) 32

• **विस्तृत व्याख्या:** इकाई के घनमूलों के गुणधर्म 1 + ω + ω^2 = 0 तथा ω^3 = 1 के अनुसार (www.iucacademy.com), 1 + ω^2 = -ω और 1 + ω = -ω^2 होता है। व्यंजक में रखने पर: (-2ω)^5 + (-2ω^2)^5 = -32ω^5 - 32ω^{10} = -32(ω^2 + ω) [क्योंकि ω^5 = ω^3 · ω^2 = ω^2 तथा ω^{10} = (ω^3)^3 · ω = ω]। चूँकि ω + ω^2 = -1, अतः मान = -32(-1) = 32।

अभ्यास प्रश्न #3 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 3. यदि द्विघात समीकरण x^2 - px + 8 = 0 के दोनों मूलों का अंतर 2 है, तो धनात्मक अचर p का मान क्या होगा?

• (क) 4

• (ख) 6

• (ग) 8

• (घ) 10

• **सही उत्तर:** (ख) 6

• **विस्तृत व्याख्या:** माना समीकरण के मूल α और β हैं। तब α + β = p और αβ = 8 (upsc.gov.in)। दिया है |α - β| = 2 ⇒ (α - β)^2 = 4 ⇒ (α + β)^2 - 4αβ = 4। मान रखने पर p^2 - 4(8) = 4 ⇒ p^2 = 36 ⇒ p = 6 (धनात्मक मान)।

अभ्यास प्रश्न #4 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 4. द्विपद प्रसार (2x^2 - (1 / x))^{12} में x से स्वतंत्र पद (Constant Term) कौन-सा है और उसका गुणांक क्या होगा?

• (क) 9वां पद, गुणांक 7920

• (ख) 8वां पद, गुणांक -7920

• (ग) 9वां पद, गुणांक 495

• (घ) 7वां पद, गुणांक 15840

• **सही उत्तर:** (क) 9वां पद, गुणांक 7920

• **विस्तृत व्याख्या:** व्यापक पद $T_{r+1} = \binom{12}{r} (2x^2)^{12-r} (-(1 / x))^r = \binom{12}{r} 2^{12-r} (-1)^r x^{24 - 3r}$ (www.iucacademy.com)। x से स्वतंत्र पद के लिए 24 - 3r = 0 ⇒ r = 8 (अर्थात् r+1 = 9वां पद)। गुणांक = $\binom{12}{8} · 2^{12-8} · (-1)^8 = \binom{12}{4} × 16 × 1 = (12 × 11 × 10 × 9 / 24) × 16 = 495 × 16 = 7920$।

अभ्यास प्रश्न #5 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 5. यदि किसी समांतर श्रेणी (A.P.) के प्रथम p पदों का योग q है और प्रथम q पदों का योग p है (p ≠ q), तो इस श्रेणी के प्रथम (p+q) पदों का योग क्या होगा?

• (क) p + q

• (ख) 0

• (ग) -(p + q)

• (घ) pq

• **सही उत्तर:** (ग) -(p + q)

• **विस्तृत व्याख्या:** समांतर श्रेणी के मानक प्रमेय (upsc.gov.in) के अनुसार, यदि S_p = q और S_q = p हो, तो सार्वअंतर d = -(2(p+q) / pq) होता है तथा प्रथम (p+q) पदों का योग S_{p+q} = -(p+q) प्राप्त होता है।

अभ्यास प्रश्न #6 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 6. यदि tan^{-1}(2) + tan^{-1}(3) = θ हो, जहाँ मुख्य मान शाखा ली गई है, तो θ का सटीक मान क्या होगा?

• (क) (π / 4)

• (ख) (3π / 4)

• (ग) -(π / 4)

• (घ) (5π / 4)

• **सही उत्तर:** (ख) (3π / 4)

• **विस्तृत व्याख्या:** प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों (www.iucacademy.com) में जब x > 0, y > 0 तथा xy > 1 हो, तब tan^{-1}x + tan^{-1}y = π + tan^{-1}((x+y / 1-xy)) होता है। यहाँ x=2, y=3 तथा xy = 6 > 1 है। अतः θ = π + tan^{-1}((2+3 / 1-6)) = π + tan^{-1}(-1) = π - (π / 4) = (3π / 4)।

अभ्यास प्रश्न #7 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 7. किसी त्रिभुज ABC में यदि भुजाएं a = 13 सेमी, b = 14 सेमी और c = 15 सेमी हों, तो उस त्रिभुज की अंतःत्रिज्या (r) और परित्रिज्या (R) का अनुपात r : R क्या होगा?

• (क) 32 : 65

• (ख) 16 : 65

• (ग) 8 : 65

• (घ) 4 : 13

• **सही उत्तर:** (क) 32 : 65

• **विस्तृत व्याख्या:** अर्द्धपरिमाप s = (13+14+15 / 2) = 21 सेमी। हीरोन के सूत्र से क्षेत्रफल Δ = √(21 × 8 × 7 × 6) = 84 वर्ग सेमी (upsc.gov.in)। अंतःत्रिज्या r = (Δ / s) = (84 / 21) = 4 सेमी। परित्रिज्या R = (abc / 4Δ) = (13 × 14 × 15 / 4 × 84) = (65 / 8) सेमी। अतः r : R = 4 : (65 / 8) = 32 : 65।

अभ्यास प्रश्न #8 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 8. सीमा \lim_{x → 0} (1 - cos(2x) / x sin(3x)) का मान क्या होगा?

• (क) (2 / 3)

• (ख) (4 / 3)

• (ग) (1 / 3)

• (घ) (3 / 2)

• **सही उत्तर:** (क) (2 / 3)

• **विस्तृत व्याख्या:** त्रिकोणमितीय सर्वसमिका 1 - cos(2x) = 2sin^2 x का प्रयोग करने पर (www.iucacademy.com), सीमा $= \lim_{x → 0} (2sin^2 x / x sin(3x)) = \lim_{x → 0} (2 (\frac{sin x / x))^2}{3 ((sin 3x / 3x))} = (2(1)^2 / 3(1)) = (2 / 3)$।

अभ्यास प्रश्न #9 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 9. यदि y = √(sin x + \sqrt{sin x + \sqrt{sin x + ·s ∞)}} हो, तो (dy / dx) का मान किसके बराबर होगा?

• (क) (cos x / 2y - 1)

• (ख) (sin x / 2y - 1)

• (ग) (cos x / 1 - 2y)

• (घ) (-cos x / 2y + 1)

• **सही उत्तर:** (क) (cos x / 2y - 1)

• **विस्तृत व्याख्या:** अनंत श्रेणी को y = √(sin x + y) लिखने पर (upsc.gov.in), दोनों पक्षों का वर्ग करने पर y^2 = sin x + y ⇒ y^2 - y = sin x। x के सापेक्ष अवकलन करने पर: (2y - 1)(dy / dx) = cos x ⇒ (dy / dx) = (cos x / 2y - 1)।

अभ्यास प्रश्न #10 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 10. अंतराल (0, ∞) में फलन f(x) = x^{(1 / x)} का उच्चिष्ठ मान (Maximum Value) किस बिंदु पर प्राप्त होता है?

• (क) x = 1

• (ख) x = e

• (ग) x = (1 / e)

• (घ) x = e^2

• **सही उत्तर:** (ख) x = e

• **विस्तृत व्याख्या:** माना y = x^{1/x} ⇒ \ln y = (\ln x / x)। अवकलन करने पर (1 / y)(dy / dx) = (1 - \ln x / x^2) (www.iucacademy.com)। क्रांतिक बिंदु के लिए (dy / dx) = 0 ⇒ 1 - \ln x = 0 ⇒ \ln x = 1 ⇒ x = e। चूँकि x = e पर द्वितीय अवकलज ऋणात्मक है, अत: फलन x = e पर उच्चिष्ठ मान e^{1/e} प्राप्त करता है।

अभ्यास प्रश्न #11 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 11. निश्चित समाकलन I = ∫_{0}^{π/2} (√(sin x) / √(sin x) + √(cos x)) dx का मान क्या होगा?

• (क) (π / 2)

• (ख) (π / 4)

• (ग) π

• (घ) 0

• **सही उत्तर:** (ख) (π / 4)

• **विस्तृत व्याख्या:** निश्चित समाकलन के गुणधर्म ∫_{0}^{a} f(x) dx = ∫_{0}^{a} f(a-x) dx का प्रयोग करने पर (upsc.gov.in), I = ∫_{0}^{π/2} (√(cos x) / √(cos x) + √(sin x)) dx। दोनों समीकरणों को जोड़ने पर 2I = ∫_{0}^{π/2} 1 dx = (π / 2) ⇒ I = (π / 4)।

अभ्यास प्रश्न #12 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 12. निश्चित समाकलन ∫_{-1}^{1} \ln((2 - x / 2 + x)) dx का मान क्या है?

• (क) 1

• (ख) 2\ln 2

• (ग) 0

• (घ) (1 / 2)

• **सही उत्तर:** (ग) 0

• **विस्तृत व्याख्या:** माना f(x) = \ln((2 - x / 2 + x))। तब f(-x) = \ln((2 + x / 2 - x)) = -\ln((2 - x / 2 + x)) = -f(x) (www.iucacademy.com)। चूँकि f(x) एक विषम फलन (Odd Function) है और समाकलन की सीमाएं [-1, 1] सममित हैं, अतः ∫_{-1}^{1} f(x) dx = 0।

अभ्यास प्रश्न #13 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 13. परवलय y^2 = 8x और उसकी नाभिलंब जीवा (Latus Rectum) से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल (वर्ग इकाई में) कितना होगा?

• (क) (16 / 3)

• (ख) (32 / 3)

• (ग) (64 / 3)

• (घ) (8 / 3)

• **सही उत्तर:** (ख) (32 / 3)

• **विस्तृत व्याख्या:** परवलय y^2 = 4ax और उसके नाभिलंब x = a के बीच घिरे क्षेत्र का मानक क्षेत्रफल (8 / 3)a^2 होता है (upsc.gov.in)। यहाँ 4a = 8 ⇒ a = 2। अतः अभीष्ट क्षेत्रफल = (8 / 3) × (2)^2 = (32 / 3) वर्ग इकाई।

अभ्यास प्रश्न #14 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 14. अवकल समीकरण [1 + ((dy / dx))^2]^{3/2} = k (d^2y / dx^2) की कोटि (Order) और घात (Degree) क्रमशः क्या हैं?

• (क) कोटि 2, घात 2

• (ख) कोटि 2, घात 3

• (ग) कोटि 1, घात 3

• (घ) कोटि 2, घात परिभाषित नहीं

• **सही उत्तर:** (क) कोटि 2, घात 2

• **विस्तृत व्याख्या:** भिन्नात्मक घात 3/2 को हटाने के लिए दोनों पक्षों का वर्ग करने पर (www.iucacademy.com): [1 + ((dy / dx))^2]^3 = k^2 ((d^2y / dx^2))^2। इसमें उच्चतम कोटि का अवकलज (d^2y / dx^2) है जिसकी कोटि 2 है, तथा इस उच्चतम अवकलज की उच्चतम घात 2 है।

अभ्यास प्रश्न #15 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 15. उस दीर्घवृत्त की उत्केंद्रता (e) क्या होगी जिसका नाभिलंब (Latus Rectum) उसके लघु अक्ष (Minor Axis) का आधा है?

• (क) (1 / 2)

• (ख) (√(3) / 2)

• (ग) (1 / √(2))

• (घ) (√(5) / 3)

• **सही उत्तर:** (ख) (√(3) / 2)

• **विस्तृत व्याख्या:** दीर्घवृत्त में नाभिलंब की लंबाई = (2b^2 / a) और लघु अक्ष = 2b होता है (upsc.gov.in)। प्रश्नानुसार, $(2b^2 / a) = (1 / 2) (2b) ⇒ (2b / a) = 1 ⇒ (b / a) = (1 / 2) ⇒ (b^2 / a^2) = (1 / 4)। अतः उत्केंद्रता e = √(1 - \frac{b^2}{a^2}} = √(1 - \frac{1}{4}} = (√(3) / 2)$।

अभ्यास प्रश्न #16 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 16. त्रिविमीय आकाश में यदि कोई रेखा X, Y तथा Z अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ क्रमशः α, β तथा γ कोण बनाती है, तो cos 2α + cos 2β + cos 2γ का मान क्या होगा?

- (क) 1
- (ख) -1
- (ग) 2
- (घ) 0

- **सही उत्तर:** (ख) -1

- **विस्तृत व्याख्या:** दिक्-कोसाइन के संबंध cos^2α + cos^2β + cos^2γ = 1 से (www.iucacademy.com), चूँकि cos 2θ = 2cos^2θ - 1, अतः cos 2α + cos 2β + cos 2γ = 2(cos^2α + cos^2β + cos^2γ) - 3 = 2(1) - 3 = -1।

अभ्यास प्रश्न #17 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 17. यदि दो इकाई सदिशों (Unit Vectors) a और b का योग a + b भी एक इकाई सदिश हो, तो उनके अंतर |a - b| का परिमाण क्या होगा?

- (क) 1
- (ख) √(3)
- (ग) √(2)
- (घ) 2

- **सही उत्तर:** (ख) √(3)

- **विस्तृत व्याख्या:** दिया है |a| = |b| = |a + b| = 1 (upsc.gov.in)। समांतर चतुर्भुज नियम से |a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)। मान रखने पर: 1^2 + |a - b|^2 = 2(1 + 1) = 4 ⇒ |a - b|^2 = 3 ⇒ |a - b| = √(3)।

अभ्यास प्रश्न #18 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 18. यदि सदिश a = 2i - j + k, b = i + 2j - 3k और c = 3i + λj + 5k समतलीय (Coplanar) हैं, तो λ का मान क्या होगा?

- (क) -4
- (ख) 4
- (ग) -2
- (घ) 6

- **सही उत्तर:** (क) -4

- **विस्तृत व्याख्या:** तीन सदिशों के समतलीय होने के लिए उनका अदिश त्रिक गुणनफल [a\ b\ c] = 0 होना चाहिए (www.iucacademy.com)। सारणिक का प्रसार करने पर: $2(10 + 3λ) - (-1)(5 + 9) + 1(λ - 6) = 0 ⇒ 20 + 6λ + 14 + λ - 6 = 0 ⇒ 7λ + 28 = 0 ⇒ λ = -4$।

अभ्यास प्रश्न #19 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 19. किसी गणितीय समस्या को तीन विद्यार्थियों A, B और C द्वारा स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकताएं क्रमशः (1 / 2), (1 / 3) और (1 / 4) हैं। यदि तीनों स्वतंत्र रूप से प्रयास करें, तो समस्या के हल हो जाने की प्रायिकता क्या होगी?

- (क) (3 / 4)
- (ख) (1 / 4)
- (ग) (1 / 24)

• (घ) (23 / 24)

• **सही उत्तर:** (क) (3 / 4)

• **विस्तृत व्याख्या:** तीनों द्वारा समस्या हल न कर पाने की प्रायिकताएं क्रमशः P(A') = 1 - (1 / 2) = (1 / 2), P(B') = 1 - (1 / 3) = (2 / 3) और P(C') = 1 - (1 / 4) = (3 / 4) हैं (upsc.gov.in)। चूँकि घटनाएं स्वतंत्र हैं, अतः समस्या के हल होने की प्रायिकता $= 1 - P(A')P(B')P(C') = 1 - ((1 / 2) × (2 / 3) × (3 / 4)) = 1 - (1 / 4) = (3 / 4)$।

अभ्यास प्रश्न #20 परीक्षा उपयोगी प्रश्न

प्रश्न 20. एक द्विपद बंटन (Binomial Distribution) का माध्य 4 और प्रसरण (Variance) 3 है। इस बंटन में कुल परीक्षणों की संख्या (n) और सफलता की प्रायिकता (p) क्रमशः क्या हैं?

• (क) n = 16, p = (1 / 4)

• (ख) n = 12, p = (1 / 3)

• (ग) n = 8, p = (1 / 2)

• (घ) n = 20, p = (1 / 5)

• **सही उत्तर:** (क) n = 16, p = (1 / 4)

• **विस्तृत व्याख्या:** द्विपद बंटन में माध्य np = 4 तथा प्रसरण npq = 3 है (www.iucacademy.com)। दोनों को भाग देने पर q = (npq / np) = (3 / 4)। चूँकि p + q = 1, इसलिए p = 1 - (3 / 4) = (1 / 4)। अब n × (1 / 4) = 4 ⇒ n = 16।

क्वालिटी ऑडिट, त्रुटि-निवारण एवं 2024–2026 उच्चतर गणित (NDA / CUET) शॉर्टकट बूस्टर

1. NDA एवं CUET उच्चतर गणित के 15 सुपर-फास्ट स्मृति ट्रिक

क्र.	अध्याय / टॉपिक	मानक परीक्षा प्रश्न प्रारूप	डायरेक्ट शॉर्टकट सूत्र (1D Formula)
1	**समुच्चय सिद्धांत (Sets)**	`n(A) = p, n(B) = q` हो, तो `A` से `B` में कुल संबंध व फलन	कुल संबंध = `2^(p × q)`, कुल फलन = `q^p`, एकैकी (One-One) फलन = `q! / (q - p)!` (जब `q >= p`) (NDA Syllabus)
2	**इकाई के घनमूल (Cube Roots of Unity)**	`1, ω, ω²` के गुणधर्म	`1 + ω + ω² = 0` तथा `ω^3 = 1`; यदि `n` 3 का गुणज नहीं है, तो `1 + ω^n + ω^(2n) = 0`
3	**द्विघात समीकरण (Quadratic Equations)**	`ax² + bx + c = 0` के मूल एक-दूसरे के व्युत्क्रम (Reciprocal) हों	शर्त: `a = c`; और यदि मूल परिमाण में बराबर किंतु चिह्न में विपरीत हों, तो `b = 0`
4	**आव्यूह एवं सारणिक (Matrices & Determinants)**	`n × n` कोटि के आव्यूह `A` के लिए `	adj(A) एवं kA ` ` adj(A) = A ^(n - 1), adj(adj A) = A ^((n - 1)²), तथा kA = k^n ×

क्र.	अध्याय / टॉपिक	मानक परीक्षा प्रश्न प्रारूप	डायरेक्ट शॉर्टकट सूत्र (1D Formula)
5	**द्विपद प्रमेय (Binomial Theorem)**	`(a*x^p + b / x^q)^n` के प्रसार में `x` से स्वतंत्र पद (Term independent of x)	डायरेक्ट ट्रिक: `r = (n × p) / (p + q)`, जहाँ `T_(r+1)` अभीष्ट पद होगा!
6	**सीमा (Limits — L'Hospital & Standard)**	`lim (x->0) (1 - cos(mx)) / (1 - cos(nx))`	डायरेक्ट उत्तर = `m² / n²`; तथा `lim (x->0) (tan(x) - sin(x)) / x^3 = 1 / 2`
7	**निश्चित समाकलन (Definite Integration — King's Rule)**	`I = ∫_(0 से π/2) [sin^n(x) / (sin^n(x) + cos^n(x))] dx`	घात `n` कुछ भी हो, उत्तर सदैव `(b - a) / 2 = (π/2 - 0) / 2 = π / 4` होगा!
8	**परवलय एवं सरल रेखा से घिरा क्षेत्रफल**	परवलय `y² = 4ax` और `x² = 4by` के बीच घिरा क्षेत्रफल	डायरेक्ट सूत्र: `Area = (16 × a × b) / 3` वर्ग इकाई; तथा `y² = 4ax` व `y = m*x` के बीच = `(8 × a²) / (3 × m^3)`
9	**सदिश बीजगणित (Vectors)**	दो सदिश `a` व `b` लंबवत (Orthogonal) या समांतर (Collinear) हों	लंबवत की शर्त: `a · b = 0`; समांतर की शर्त: `a × b = 0`; लैग्रेंज सर्वसमिका: ` a × b ² + (a · b)² = a ² × b ²`

क्र.	अध्याय / टॉपिक	मानक परीक्षा प्रश्न प्रारूप	डायरेक्ट शॉर्टकट सूत्र (1D Formula)
10	**प्रायिकता (Binomial Distribution)**	द्विपद बंटन $B(n, p)$ का माध्य (Mean) एवं प्रसरण (Variance)	**माध्य (np) > प्रसरण (npq)** सदैव सत्य होता है क्योंकि $0 < q < 1$, और $p + q = 1$ (CUET Maths)